

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 4 (36)

2015

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Цунак А. А.</i> О фредгольмовости интегродифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов.....	3
<i>Алехина М. А.</i> О вероятностях ошибок в одной модели вычислений .....	12
<i>Ладошкин М. В.</i> Дополнительные операции на комплексе Хохшильда для симплициального множества.....	20
<i>Пожидаетев А. В., Пекельник Н. М., Хаустова О. И., Трефилова И. А.</i> О некоторых представлениях гамма-функции .....	29
<i>Романов Д. С.</i> Метод синтеза избыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один.....	38
<i>Данилов Б. Р.</i> Об одновременной оптимизации формул по сложности и задержке на наборах в модели с задержками соединений между элементами.....	55
<i>Деревянчук Е. Д., Шутков А. С.</i> Численный метод определения электромагнитных и геометрических параметров диафрагмы в волноводе .....	75
<i>Деревянчук Е. Д.</i> Обратная задача восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения.....	84

ФИЗИКА

<i>Болдыревский П. Б., Коровин А. Г., Денисов С. А., Светлов С. П., Шенгуров В. Г.</i> Анализ неравномерности толщины эпитаксиального слоя кремния при осаждении из сублимационных источников в вакууме .....	93
<i>Ницев К. Н., Новопольцев М. И., Беглов В. И., Окин М. А., Лютова Е. Н.</i> Измерение температуропроводности тонких металлических слоев методом лазерной вспышки .....	101
<i>Кревчик В. Д., Разумов А. В., Будянский П. С.</i> Особенности фотоэлектрического эффекта, связанного с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах во внешнем магнитного поле .....	111

**UNIVERSITY PROCEEDINGS  
VOLGA REGION  
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 4 (36)

2015

**CONTENT**

**MATHEMATICS**

---

<i>Tsupak A. A.</i> On Fredholm property of an integro-differential operator in the problem of electromagnetic wave diffraction on a volumetric body, partially screened by a system of flat screens.....	3
<i>Alekhina M. A.</i> On error probability in one model of computation .....	12
<i>Ladoshkin M. V.</i> Additional operations on the Hochschild complex for the simplicial set.....	20
<i>Pozhidaev A. V., Pekelnik N. M., Khaustova O. I., Trefilova I. A.</i> Some representations of the gamma function.....	29
<i>Romanov D. S.</i> A method of synthesis of irredundant circuits (in Zhegalkin's basis) admitting single fault diagnostic test sets with cardinality 1 .....	38
<i>Danilov B. R.</i> On simultaneous optimization of formulas by complexity and delay in a model with intergate and gate's inputs delays.....	55
<i>Derevyanchuk E. D., Shutkov A. S.</i> A numerical method of determination of electromagnetic and geometrical parameters of a diaphragm in a waveguide.....	75
<i>Derevyanchuk E. D.</i> An inverse problem of tensor reconstruction of a multi-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the transmission or reflection coefficients .....	84

**PHYSICS**

---

<i>Boldyrevskiy P. B., Korovin A. G., Denisov S. A., Svetlov S. P., Shengurov V. G.</i> Analysis of thickness unevenness of the epitaxial silicon layer during deposition from sublimation sources in a vacuum .....	93
<i>Nishchev K. N., Novopol'tsev M. I., Beglov V. I., Okin M. A., Lyutova E. N.</i> Measurement of temperature conductivity of thin metal layers by laser flash method .....	101
<i>Krevchik V. D., Razumov A. V., Budyanskiy P. S.</i> Features of the photodielectric effect, associated with $A^+ + e$ extrinsic complex excitation in quazero-dimensional structures in an external magnetic field .....	111

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

*А. А. Цупак*

## О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ОБЪЕМНОМ ТЕЛЕ, ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННОМ СИСТЕМОЙ ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ<sup>1</sup>

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Цель работы – теоретическое исследование векторной задачи рассеяния электромагнитной волны на частично экранированном объемном теле.

*Материалы и методы.* Задача рассматривается в квазиклассической постановке; краевая задача сводится к системе интегродифференциальных уравнений, для исследования которой применяются элементы теории псевдодифференциальных операторов на многообразиях с краем.

*Результаты.* Сформулирована квазиклассическая постановка задачи дифракции; краевая задача сведена к системе интегродифференциальных уравнений; оператор системы уравнений рассмотрен как псевдодифференциальный оператор (ПДО) в пространствах Соболева на многообразиях с краем; исследована квадратичная форма матричного ПДО, установлена ее коэрцитивность; доказана фредгольмовость ПДО.

*Выводы.* Получен результат о фредгольмовости матричного интегродифференциального оператора рассматриваемой задачи дифракции, важный для дальнейшего теоретического исследования задачи дифракции и для обоснования проекционных методов ее приближенного решения.

**Ключевые слова:** векторная задача дифракции, интегродифференциальные уравнения, пространства Соболева, псевдодифференциальные операторы, квадратичная форма, коэрцитивность.

*А. А. Tsupak*

## ON FREDHOLM PROPERTY OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON A VOLUMETRIC BODY, PARTIALLY SCREENED BY A SYSTEM OF FLAT SCREENS

### **Abstract.**

*Background.* The aim of this work is to study a new vector problem of electromagnetic wave scattering on a partially shielded volumetric inhomogeneous anisotropic body.

*Material and methods.* The problem is considered in the quasiclassical formulation; the original boundary value problem is reduced to a system of integro-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00344).

differential equations; the properties of the system are studied using pseudodifferential calculus in Sobolev spaces on manifolds with a boundary.

*Results.* The quasiclassical formulation of the diffraction problem is proposed; the boundary value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations; the operator of this system is treated as a pseudodifferential operator ( $\psi$ DO) in Sobolev spaces on manifolds with a boundary; the quadratic form of the matrix  $\psi$ DO is studied and is shown to be coercive; the Fredholm property of the  $\psi$ DO is proved.

*Conclusions.* The matrix  $\psi$ DO is proved to be a Fredholm operator of zero index; this results can be used for further theoretical study of the diffraction problem as well as for validation of numerical methods.

**Key words:** vector diffraction problem, integro-differential equations, Sobolev spaces, pseudodifferential operators, coercive quadratic form.

## 1. Постановка задачи дифракции. Система интегродифференциальных уравнений

Пусть  $Q$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$ , причем некоторая часть этой границы  $\Omega$  – плоский экран или система непересекающихся плоских экранов:  $\bar{\Omega} \subset \partial Q$ . Край  $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$  экрана  $\Omega$  – гладкая кривая (или система кривых) класса  $C^\infty$  без точек самопересечения;  $\partial\Omega_\delta := \bigcup_{x \in \partial\Omega} B_\delta(x)$  – трубчатые окрестности края экрана. Предполагаем, что экран  $\Omega$  – абсолютно проводящая поверхность с определенным заранее полем нормалей  $\mathbf{n}$ .

Область  $Q$  является неоднородной и анизотропной; она характеризуется постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_e > 0$  и тензорной диэлектрической проницаемостью  $\hat{\epsilon}(x)$ , причем  $\epsilon_{ij} \in C^\infty(\bar{Q})$ . Потребуем, чтобы во всех точках области неоднородности существовал тензор  $\hat{\xi}(x) = (\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{\mathbf{I}})^{-1}$ ; здесь  $\hat{\epsilon}_r = \hat{\epsilon} / \epsilon_e$  – тензор относительной диэлектрической проницаемости. Кроме того, всюду в  $\bar{Q}$  для  $\hat{\epsilon}(x)$  должно выполняться хотя бы одно из условий:

$$\operatorname{Re} \hat{\epsilon}(x) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \geq C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при } C_1 > 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} \hat{\epsilon}(x) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \geq C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при } C_2 > 1 \quad (2)$$

для всех  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ .

Свободное пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$  однородно с постоянными значениями проницаемостей  $\mu_e > 0$  и  $\epsilon_e$ , причем всюду в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$  выполняются условия

$$\operatorname{Re} \epsilon_e > 0, \quad \operatorname{Im} \epsilon_e > 0. \quad (3)$$

Задача дифракции электромагнитной волны с гармонической зависимостью от времени вида  $e^{-i\omega t}$  на частично экранированном теле  $Q$  приводит к следующей системе интегродифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(x) - \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_Q \widehat{\mathbf{G}}(x, y) (\widehat{\varepsilon}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy - \\
& - \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\
& \left( - \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_Q \widehat{\mathbf{G}}(x, y) (\widehat{\varepsilon}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y) dy - \right. \\
& \left. - \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_{\tau} = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь  $k_e$  – волновое число ( $k_e^2 = \omega^2 \varepsilon_e \mu_e$ );  $\mathbf{E}$  – полное электрическое поле;  $\mathbf{E}_0$  – падающее электрическое поле;  $\mathbf{u}$  – поверхностная плотность электрического тока на  $\Omega$  (представляет собой векторное поле, касательное к  $\Omega$ );  $\widehat{\mathbf{I}}$  – единичный  $3 \times 3$ -тензор.

Функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве определяется стандартным образом:

$$\widehat{\mathbf{G}}(x, y) = G(x, y) \widehat{\mathbf{I}} = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|} \widehat{\mathbf{I}};$$

символом  $(\mathbf{w})_{\tau}$  обозначена операция вычисления касательной компоненты векторного поля  $\mathbf{w}$  во внутренних точках экрана  $\Omega$  [2, с. 97].

Введем ток поляризации  $\mathbf{J}(y) = (\widehat{\varepsilon}_r(y) - \widehat{\mathbf{I}}) \mathbf{E}(y)$  и перепишем систему (4) в токах, разделив первое уравнение на  $\bar{k}_e$ , а второе – на  $k_e$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{k}_e} \widehat{\xi}(x) \mathbf{J}(x) - \frac{1}{\bar{k}_e} \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_Q \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \\
& - \frac{1}{k_e} \left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \frac{1}{\bar{k}_e} \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \\
& \left( - \left(k_e + \frac{1}{k_e} \text{grad div}\right) \int_Q \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \right. \\
& \left. - \left(k_e + \frac{1}{k_e} \text{grad div}\right) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_{\tau} = \frac{1}{k_e} \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)
\end{aligned}$$

Представим тензор  $\widehat{\mathbf{G}}$  в виде  $\widehat{\mathbf{G}}(x, y) = \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) + \widehat{\mathbf{G}}_1(x, y)$ , где  $\widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) = G_0(x, y) \widehat{\mathbf{I}} = (4\pi|x-y|)^{-1} \widehat{\mathbf{I}}$ , и введем оператор системы (5):

$$\widehat{L} = \widehat{A} + \widehat{K}^1 + \widehat{K}^2. \quad (6)$$

Компоненты матричных операторов в разложении (6) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11}\mathbf{J}(x) &= \frac{1}{k_e}\widehat{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy, \\ A_{12}\mathbf{u}(x) &= -\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y, \\ A_{21}\mathbf{J}(x) &= \left(-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_{\tau}, \\ A_{22}\mathbf{u}(x) &= \left((k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div})\int_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y\right)_{\tau}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} K_{11}^1\mathbf{J}(x) &= -\frac{k_e^2}{k_e}\int_Q\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy, & K_{12}^1\mathbf{u}(x) &= -\frac{k_e^2}{k_e}\int_{\Omega}\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y, \\ K_{21}^1\mathbf{J}(x) &= \left(-k_e\int_Q\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_{\tau}, & K_{22}^1\mathbf{u}(x) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты оператора  $\widehat{K}^2$  в разложении (6) определяются согласно системе (5), причем ядро интегральных операторов в  $\widehat{K}^2$  – тензор  $\widehat{\mathbf{G}}_1(x, y)$ .

Будем рассматривать введенный оператор как матричный псевдодифференциальный оператор (ПДО) в пространствах Соболева на многообразиях с краем [2–4]:

$$\widehat{L}: L_2^3(Q) \times W(\Omega) \rightarrow L_2^3(Q) \times W'(\Omega),$$

где  $W(\overline{\Omega}) = W$  – пространство сечений векторных расслоений [2, с. 88], представляющее собой пополнение  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_W$ :

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{L_{1/2}^2}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L_{1/2}^2}^2.$$

Здесь  $\|\mathbf{u}\|_{L_{1/2}^2}$  обозначает норму в пространстве Соболева  $H^{-1/2}(\Omega)$ ; пространство  $W'(\Omega) = W'$  – антидвойственное к  $W$  [2, с. 88].

## 2. Коэрцитивность квадратичной формы оператора задачи дифракции

Введем обозначения:  $L_2^3(Q) \times W(\Omega) =: P$ ,  $L_2^3(Q) \times W'(\Omega) =: P'$  и  $(\mathbf{J}, \mathbf{u}) =: \mathbf{w} \in P$ .

**Теорема 1.** Квадратичная форма  $(\widehat{L}\mathbf{w}, \mathbf{w})_{L_2^3}$  оператора  $\widehat{L}$  является коэрцитивной, т.е. существует такой компактный оператор  $\widehat{L}^c : P \rightarrow P'$ , что для всех  $\mathbf{w} \in P$  выполняется неравенство

$$\text{Im}((\widehat{L} - \widehat{L}^c)\mathbf{w}, \mathbf{w})_{L_2^3} \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_P \tag{9}$$

с некоторой константой  $\gamma > 0$ .

**Доказательство.** 1. Покажем сначала, что операторы  $\widehat{K}^1, \widehat{K}^2$  компактны в выбранных пространствах. Для  $\widehat{K}^2$  это очевидно, так как ядра интегральных операторов в определении всех  $\widehat{K}_{ij}^2$  имеют устранимую особенность.

Компактность  $\widehat{K}^1$  следует из свойств операторов типа потенциала, оператора касательного следа и компактности операторов вложения в пространствах Соболева. Так как  $\mathbf{u} \in W$ , то  $K_{12}^1 \mathbf{u} \in H^1(Q)$  [5], поэтому  $K_{12}^1 : W \rightarrow L_2^3(Q)$  компактен. Аналогично, из условия  $\mathbf{J} \in L_2(Q)$  следует [6]  $\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ , откуда  $K_{11}^1 \mathbf{J} \in H^2(Q)$  и  $K_{21}^1 \mathbf{J} \in H^{3/2}(\Omega)$ ; следовательно, операторы  $K_{11}^1 : L_2^3(Q) \rightarrow L_2^3(Q)$  и  $K_{21}^1 : L_2^3(Q) \rightarrow W'$  компактны.

2. Остается показать, что квадратичная форма  $(\widehat{A}\mathbf{w}, \mathbf{w})_{L_2^3}$  оператора  $\widehat{A}$  удовлетворяет условию коэрцитивности. Имеем:

$$\begin{aligned} (\widehat{A}\mathbf{w}, \mathbf{w})_{L_2^3} &= \left( \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right) = \\ &= (A_{11}\mathbf{J}, \mathbf{J}) + (A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) + (A_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u}) + (A_{22}\mathbf{u}, \mathbf{u}). \end{aligned} \tag{10}$$

В работах [7, 8] показано, что при выполнении одного из условий (1) или (2) ПДО

$$A\mathbf{J}(x) = \bar{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \text{grad div} \int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \bar{k}_1 A_{11}\mathbf{J}(x)$$

является фредгольмовым с нулевым индексом, а для его «главной части»  $A_0$  верны неравенства

$$\text{Im}(A_0\mathbf{J}, \mathbf{J}) \geq \gamma_0 \|\mathbf{J}\|_{L_2^3(Q)} \text{ при } \gamma_0 > 0 \tag{11}$$

и

$$\text{Re}(A_0\mathbf{J}, \mathbf{J}) \geq \gamma_1 \|\mathbf{J}\|_{L_2^3(Q)} \text{ при } \gamma_1 > 1. \tag{12}$$

Обозначая  $1/\bar{k}_e$  через  $k_1 := k_1' + ik_1''$ , получим

$$\text{Im}(A_{11}\mathbf{J}, \mathbf{J}) = \text{Im}(k_1(A\mathbf{J}, \mathbf{J})) = k_1' \text{Im}(A\mathbf{J}, \mathbf{J}) + k_1'' \text{Re}(A\mathbf{J}, \mathbf{J}).$$

Отсюда, а также из (11), (12) и ограничений (3) на  $\varepsilon_0$ , выводим:

$$\operatorname{Im}((A_{11} - A_{11}^c)\mathbf{J}, \mathbf{J}) \geq \gamma_2 \|\mathbf{J}\|, \quad (13)$$

где  $\gamma_2 > 0$ , а  $A_{11}^c : L_2^3(Q) \rightarrow L_2^3(Q)$  компактен. Отметим, что свойство коэрцитивности (13) выполняется и в случае, когда область неоднородности  $Q$  не является поглощающей.

Рассмотрим теперь квадратичную форму оператора  $A_{22}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A_{22}\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \operatorname{Im} \int_{\Omega} \left( k_e + \frac{1}{k_e} \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \bar{\mathbf{u}}(x) ds_x = \\ &= \operatorname{Im} \iint a(\xi) \left( k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi)) \right) e^{ix\xi} d\xi \cdot \bar{\mathbf{u}}(x) dx = \\ &= \operatorname{Im} \int a(\xi) \left( k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi)) \right) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi = \\ &= \operatorname{Im} \int \left( \frac{1}{\langle \xi \rangle} + a'(\xi) \right) \left( k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi)) \right) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi = \\ &= \operatorname{Im} k_e \left( \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \frac{1}{|k_e|^2} |\xi \cdot \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) + \operatorname{Im}(A_{22}^c \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \\ &\geq \gamma_3 \|\mathbf{u}\|_W^2 + \operatorname{Im}(A_{22}^c \mathbf{u}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (14)$$

В сделанных выше преобразованиях оператор  $A_{22}$  представлен как ПДО с матричным символом  $\sigma(A_{22}) = a(\xi) \left( k_e \widehat{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_e} \xi \otimes \xi^T \right)$ ,  $a(\xi) \widehat{\mathbf{I}}$  – символ интегрального оператора  $\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y$ , а  $\frac{1}{\langle \xi \rangle}$  – главная часть  $a(\xi)$ . Из (14) видно, что квадратичная форма оператора  $A_{22}$  также удовлетворяет условию коэрцитивности.

Покажем теперь, что

$$(A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) = \overline{(A_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u})}. \quad (15)$$

Всюду ниже будем рассматривать плоские экраны, перпендикулярные оси  $0x_3$ . Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , тогда  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, 0)^T$  и  $(\mathbf{v})_{\tau} := (v^1, v^2, 0)$  для всех вектор-функций  $\mathbf{v}$ , заданных на  $\Omega$ . Обозначим  $\frac{1}{k} = \frac{k}{|k|^2} =: k_1$ ,  $\bar{k}_1 = k_2$ , тогда

$$-(A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) = \int_Q \overline{\mathbf{J}(x)} k_1 \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y dx =$$

$$\begin{aligned}
&= k_1 \int_Q \operatorname{div}_x \left( \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right) dx - \\
&\quad - k_1 \int_Q \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y dx = \\
&= k_1 \int_{\partial Q} \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \left( \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right) \cdot \mathbf{n}_Q(x) ds_x + \\
&\quad + k_1 \int_{\Omega} \mathbf{u}(y) \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(x, y) \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} dx ds_y =: i_1 + i_2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь форму  $(L_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u})$ :

$$\begin{aligned}
-(A_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} k_2 \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int_Q \operatorname{grad}_x G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(x, y) \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \left( \int_Q \operatorname{div}_y (\widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{J}(y)) - \right. \\
&\quad \left. - \int_Q G_0(x, y) \operatorname{div}_y \mathbf{J}(y) dy \right) ds_x =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
I_1 &= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int_{\partial Q} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{n}_Q(y) ds_y ds_x = \\
&= -k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_{\partial Q} \operatorname{grad}_y G_0(y, x) (\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_x ds_y = \\
&= k_2 \int_{\partial Q} \int_{\Omega} (\overline{\mathbf{u}(y)} \cdot \operatorname{grad}_x G_0(x, y)) (\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_y ds_x = \\
&= k_2 \int_{\partial Q} \mathbf{J}(x) \operatorname{div}_x \left( \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \overline{\mathbf{u}(y)} ds_y \right) \cdot \mathbf{n}_Q(x) ds_x = \bar{i}_1
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y) \operatorname{div}_y \mathbf{J}(y) dy ds_x = \\ &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(y, x) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) dx ds_y = \\ &= k_2 \int_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int_Q \operatorname{grad}_y G_0(x, y) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x) dx ds_y = \overline{i_2}, \end{aligned}$$

то получим требуемое соотношение:  $(A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) = \overline{(A_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u})}$ .

Из доказанного выше, а также из (13) и (14) заключаем, что

$$\operatorname{Im}((\widehat{A} - \widehat{A}^c)\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_P \quad (16)$$

с некоторой константой  $\gamma > 0$  и компактным оператором  $\widehat{A}^c : P \rightarrow P'$ .

Из доказанной теоремы следует основной результат работы.

**Теорема 2.** Оператор  $\widehat{A} : P \rightarrow P'$  является фредгольмовым с нулевым индексом, причем для случая области  $Q$  без поглощения достаточно выполнения ограничений (1) и (3); если же область неоднородности  $Q$  является поглощающей, то дополнительно должно выполняться условие (2).

### Заключение

Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на сложном препятствии. Применение теории потенциала и псевдодифференциальных операторов позволило доказать важное утверждение о коэрцитивности квадратичной формы матричного интегродифференциального оператора, которое играет существенную роль для дальнейшего теоретического и численного исследования поставленной задачи.

### Список литературы

1. **Smirnov, Y. G.** Integrodifferential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Y. G. Smirnov, A. A. Tsupak // *Advances in Mathematical Physics*. – 2015. – Vol. 2015. – 6 p.
2. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖР, 1996. – 173 с.
3. **Агранович, М. С.** Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. – М. : МЦНМО, 2013. – 379 с.
4. **Трибель, Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
5. **Costabel, M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. – 1988. – Vol. 19, № 3. – P. 613–626.
6. **Banjai, L.** Boundary element methods / L. Banjai. – Zurich, 2007.

7. **Валовик, Д. В.** Метод псевдодифференциальных операторов для исследования объемного сингулярного интегрального уравнения электрического поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 70–84.
8. **Valovik, D. V.** Pseudodifferential Operator Method in a Problem on the Diffraction of an Electromagnetic Wave on a Dielectric Body / D. V. Valovik, Y. G. Smirnov // Differential Equations, 2012. – Vol. 48, № 4. – P. 517–523.

### References

1. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. *Advances in Mathematical Physics*. 2015, vol. 2015, 6 p.
2. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh. Pseudodifferentsial'nye operatory v zadachakh difraktsii* [Electromagnetic wave diffraction on thin conducting screens. Pseudodifferential operators in diffraction problems]. Moscow: IPRZhR, 1996, 173 p.
3. Agranovich M. S. *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastiakh s gladkoy i lipshitsevoy granitse* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in areas with smooth and Lipschitz boundaries]. Moscow: MTsNMO, 2013, 379 p.
4. Tribel' Kh. *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory* [Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators]. Moscow: Mir, 1980, 664 p.
5. Costabel M. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 1988, vol. 19, no. 3, pp. 613–626.
6. Banjai L. *Boundary element methods*. Zurich, 2007.
7. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 4 (12), pp. 70–84.
8. Valovik D. V., Smirnov Y. G. *Differential Equations*. 2012, vol. 48, no. 4, pp. 517–523.

---

#### **Цупак Алексей Александрович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

#### **Tsupak Aleksey Aleksandrovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling, Penza  
State University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

#### **Цупак, А. А.**

**О фредгольмовости интегродифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированной системой плоских экранов / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 3–11.**

## О ВЕРОЯТНОСТЯХ ОШИБОК В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ<sup>1</sup>

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Многозначная логика предоставляет широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях и с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Этим объясняется интерес к различным моделям вычислений, среди которых важное место занимают схемы из функциональных элементов. В этой работе продолжается исследование ненадежности схем, реализующих функции  $k$ -значной логики ( $k \geq 3$ ), а ее цель – выявить свойства подсхем, вероятности ошибок которых определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

*Материалы и методы.* В работе используются известные методы дискретной математики и математической кибернетики для получения оценок ненадежности схемы и для оценки числа функций специального вида.

*Результаты.* Для произвольного  $k \geq 3$  найдены подсхемы, по вероятностям ошибок которых можно оценить ненадежность всей схемы, причем существенно расширен класс функций, реализуемых этими подсхемами. Расширен ранее известный класс таких функций четырехзначной логики, что для любой схемы, реализующей функцию этого класса, выполняется нижняя оценка ненадежности в базисе Россера – Туркетта.

*Выводы.* Вероятности ошибок некоторых подсхем определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

**Ключевые слова:** функции  $k$ -значной логики, ненадежные функциональные элементы, синтез схем из ненадежных элементов.

М. А. Alekhina

## ON ERROR PROBABILITY IN ONE MODEL OF COMPUTATION

### **Abstract.**

*Background.* Multivalued logic offers ample opportunities for development of various algorithms in many fields. It is successfully applied for solution of many problems and in many technical developments. These facts explain an interest to various models of computation, including circuits compiled of functional gates. The present work continues researching unreliability of circuits realizing functions of  $k$ -meaning logic ( $k \geq 3$ ); the aim of the work is to reveal properties of sub-circuits, error probability of which determines the lower value of unreliability of the whole circuit.

*Materials and methods.* The study was based on the well-known methods of discrete mathematics and mathematical cybernetics that provided values of circuit unreliability and allowed to assess a number of functions of special type.

*Results.* For a random  $k \geq 3$  the author has found sub-circuits, the error probability of which enables to assess reliability of the whole circuit, while the class of functions, realized by the said sub-circuits, has been significantly expanded. The previ-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 14-01-00273а).

ously known class of such functions of four valued logic has been expanded in such a manner that any circuit, realizing the function of this class, holds the lower value of reliability in the Rosser-Turkett basis.

*Conclusions.* Error probability of some unreliable sub-circuits determines the lower value of unreliability of the whole system.

**Key words:**  $k$ -meaning logics functions, unreliable functional gates, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

### Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Основные модельные объекты, работающие на основе двузначной логики (например, схемы из ненадежных элементов [1–3], неветвящиеся программы [4]) на данный момент являются достаточно хорошо изученными. Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Этим объясняется интерес к различным моделям вычислений, среди которых важное место занимают схемы из функциональных элементов. В этой работе продолжается исследование ненадежности схем, реализующих функции  $k$ -значной логики ( $k \geq 3$ ).

В работе [5] описаны функции  $k$ -значной логики, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, а в [6, 7] построены асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта при  $k = 3$  и 4 соответственно. При синтезе асимптотически оптимальных по надежности схем возникает задача получения верхних и нижних оценок ненадежности схем, реализующих функции  $k$ -значной логики ( $k \geq 3$ ).

Цель этой статьи – выявить свойства подсхем надежных схем, с помощью которых можно получить нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

### 1. Основные понятия и определения

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , а  $P_k$  – множество всех функций  $k$ -значной логики, т.е. функций  $f(x_1, \dots, x_n): (E_k)^n \rightarrow E_k$ . Рассмотрим реализацию функций из  $P_k$  схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе  $B$ .

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$  ( $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ ), если при поступлении на входы схемы набора  $\tilde{a}^n$  при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение  $f(\tilde{a}^n)$ .

Предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а сами неисправности могут быть произвольными (например, инверсными или константными).

Пусть схема  $S$  реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$ ,  $\tilde{a}^n$  – произвольный входной набор схемы  $S$ ,  $f(\tilde{a}^n) = \tau$ . Обозначим через  $P_i(S, \tilde{a}^n)$  вероятность появления значения  $i$  на выходе схемы  $S$  при входном наборе  $\tilde{a}^n$ , а через  $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)$  – вероятность появления ошибки на выходе схемы  $S$  при входном наборе  $\tilde{a}^n$ . Ясно, что

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{\tau+k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Отметим, что в выражениях  $\tau+1$ ,  $\tau+2$ , ...,  $\tau+k-1$  сложение осуществляется по  $\text{mod } k$ .

Например, если входной набор  $\tilde{a}^n$  схемы  $S$  такой, что  $f(\tilde{a}^n) = 0$ , то вероятность ошибки на этом наборе равна

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Ненадежностью схемы  $S$  будем называть число  $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)\}$ , где максимум берется по всем входным наборам  $\tilde{a}^n$  схемы  $S$ . Надежностью схемы  $S$  равна  $1 - P(S)$ .

## 2. О нижних оценках ненадежности схем

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  – произвольная функция из  $P_k$ . Обозначим через  $E_f$  ( $E_f \subseteq E_k$ ) множество значений функции  $f$ . Пусть  $S$  – схема, реализующая функцию  $f$ , причем в схеме  $S$  можно выделить подсхему  $D$ , которая имеет один вход и содержит выход схемы  $S$ . Поскольку  $D$  имеет один вход, очевидно, что она реализует функцию  $\chi(y)$  одной переменной  $y$ . Пусть функция  $\chi(y)$  принимает все  $k$  значений. Обозначим через  $C$  подсхему, получаемую из схемы  $S$  удалением подсхемы  $D$ . Пусть схема  $C$  реализует функцию  $h(\tilde{x}^n)$ .

О схеме  $C$  будем говорить, что она надежнее схемы  $S$  (и получается из схемы  $S$  удалением подсхемы  $D$ ), если выполнено неравенство  $P(C) < P(S)$ .

Схему  $S$ , реализующую функцию  $f$ , будем называть *bc-схемой*, если из нее нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, реализующей функцию одной переменной.

Обозначим через  $w_\sigma$  ( $\sigma \in E_k$ ) вероятность появления ошибки на выходе схемы  $D$  при поступлении на ее вход значения  $\sigma$ .

Справедлива теорема 1, которая обобщает ранее известные аналоги этой теоремы для  $k=3$  и  $4$  [6, 7], причем не только на случай произвольного  $k$ , но и для произвольной функции  $\chi(y)$ , принимающей  $k$  значений (в работах [6, 7]  $\chi(y) \equiv y$ ).

**Теорема 1.** Пусть схема  $S$ , ненадежность которой равна  $P(S)$ , реализует функцию  $f$  и является *bc-схемой*. Пусть в схеме  $S$  можно выделить подсхему  $D$ , имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую функцию  $\chi(y)$ , принимающую все  $k$  значений, с ненадежностью  $P(D)$  ( $0 < P(D) < 1/2$ ). Тогда верно неравенство

$$\frac{\min\{w_\sigma\}}{2P(D)} \leq P(S),$$

где минимум берется по всем  $\sigma \in E_k$ .

**Доказательство** (от противного). Пусть для схемы  $S$  и реализуемой ею функции  $f$  выполнены условия теоремы. Без ограничения общности можно считать, что функция  $f$  зависит от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ , т.е.  $f = f(\tilde{x}^n)$ .

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда при всех  $\sigma \in E_k$

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} > P(S).$$

Поэтому верно неравенство

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} - w_\sigma = \frac{w_\sigma(1-2P(D))}{2P(D)} > P(S) - w_\sigma.$$

Следовательно,

$$\frac{w_\sigma}{2P(D)} > \frac{P(S) - w_\sigma}{1 - 2P(D)}. \quad (1)$$

Пусть  $\tilde{a}^n$  – такой входной набор схемы  $S$ , что  $h(\tilde{a}^n) = \sigma$  и  $P_{h(\tilde{a}^n) \neq \sigma}(C, \tilde{a}^n) = P(C)$  ( $\sigma \in E_h$ ). Обозначим через  $\tau$  значение функции  $f(\tilde{x}^n)$ , т.е.  $f(\tilde{a}^n) = \chi(h(\tilde{a}^n)) = \tau$ . Найдем вероятность  $P_\tau(S, \tilde{a}^n)$  появления  $\tau$  на выходе схемы  $S$ :

$$\begin{aligned} P_\tau(S, \tilde{a}^n) &= P_\sigma(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma) + P_{\sigma+1}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+1) + \dots + \\ &\quad + P_{\sigma+k-1}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+k-1) = \\ &= P_\sigma(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+i) = \\ &= \left[ 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n) \right] (1 - w_\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} \left[ P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)P_\tau(D, \sigma+i) \right] = \\ &= 1 - w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[ P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(w_\tau - 1 + P_\tau(D, \sigma+i)) \right]. \end{aligned}$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы  $S$  равна

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) &= w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[ P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P_\tau(D, \sigma+i)) \right] \geq \\ &\geq w_\tau + \sum_{i=1}^{k-1} \left[ P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P(D)) \right] \geq w_\tau + (1 - 2P(D)) \sum_{i=1}^{k-1} \left[ P_{\sigma+i}(C, \tilde{a}^n) \right] \geq \\ &\geq w_\tau + (1 - P(D))P(C), \end{aligned}$$

т.е. верно неравенство

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) \geq w_\tau + P(C)(1 - 2P(D)). \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует неравенство

$$\frac{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - 2P(D)} \geq P(C). \quad (3)$$

Учитывая (3) и (1), получаем неравенство

$$P(C) \leq \frac{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - 2P(D)} \leq \frac{P(S) - w_\tau}{1 - 2P(D)} < \frac{w_\tau}{2P(D)},$$

тогда

$$-2P(C)P(D) > -w_\tau. \quad (4)$$

Из неравенства (2), учитывая (4), следует

$$\begin{aligned} P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) &\geq w_\tau + P(C)(1 - 2P(D)) = w_\tau + P(C) - 2P(C)P(D) > \\ &> w_\tau + P(C) - w_\tau = P(C). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство  $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) > P(C)$ , из которого следует неравенство  $P(S) > P(C)$ , что противоречит условию.

Теорема 1 доказана.

Покажем, как можно использовать теорему 1 для доказательства нижней оценки ненадежности схем, например, в базисе Россера – Туркетта при  $k = 4$ .

### 3. Нижние оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта

Рассмотрим реализацию функций из множества  $P_4$  схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе Россера – Туркетта  $\{0, 1, 2, 3, J_0(x_1), J_1(x_1), J_2(x_1), J_3(x_1), \min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\}$  ( $\min\{x_1, x_2\}$  будем также обозначать через  $\&$ , а  $\max\{x_1, x_2\}$  – через  $\vee$  [8, с. 46]).

Обозначим через  $K_1(n)$  множество таких функций четырехзначной логики, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ), что каждая из этих функций принимает все четыре значения 0, 1, 2, 3 и не представима ни в виде  $x_m \vee h(\tilde{x}^n)$ , ни в виде  $x_m \& h(\tilde{x}^n)$ , ( $m \in \{1, 2, \dots, n\}$   $h(\tilde{x}^n)$  – произвольная

функция четырехзначной логики). Пусть  $K_1 = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_1(n)$ . Ранее доказаны

утверждение 1 и теорема 2.

$$\text{Утверждение 1 [7]. } |K_1(n)| \geq 4^{4^n} - 2n4^{3 \cdot 4^{n-1}} - 4 \cdot 3^{4^n}.$$

**Теорема 2** [7]. Пусть функция  $f \in K_1$ . Тогда для любой схемы  $S$ , реализующей  $f$ , при  $\varepsilon \in (0, 1/1000]$  верно неравенство

$$P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3.$$

Покажем, что множество  $K_1$  можно расширить.

Обозначим через  $K(n)$  множество таких функций из  $P_4(n)$ , зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ), что каждая из этих функций принимает не менее трех значений, среди которых 0 и 3, и не представима ни в виде  $x_m \vee h(\tilde{x}^n)$ , ни в виде  $x_m \& h(\tilde{x}^n)$  ( $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $h(\tilde{x}^n)$  – произвольная функция четырехзначной логики). Пусть  $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$ .

**Утверждение 2.**  $|K(n)| \geq 4^{4^n} - 2n4^{3 \cdot 4^{n-1}} - 2 \cdot 3^{4^n}$ .

**Доказательство** такое же, как в утверждении 1, отличие лишь в заключительной части: оценим число функций, принимающих не меньше трех значений, среди которых 0 и 3. Для этого из всех  $4^{4^n}$  функций удалим функции, принимающие только значения 0 и 3 (их  $2^{4^n}$ ), а также те функции, которые не принимают значение 0 или значение 3 (их  $3^{4^n} + 3^{4^n} - 2^{4^n} = 2 \cdot 3^{4^n} - 2^{4^n}$ ).

Очевидно, что при всех  $n \geq 3$  имеет место строгое включение:  $K_1(n) \subset \subset K(n)$ , из которого следует класс  $K(n)$ , также как и класс  $K_1(n)$  содержит почти все функции из  $P_4(n)$ .

Справедлива теорема 3 о нижней оценке ненадежности схем, реализующих функции из класса  $K$ .

**Теорема 3.** Пусть функция  $f \in K$ . Тогда для любой схемы  $S$ , реализующей  $f$ , при всех  $\varepsilon \in (0, 1/1000]$  верно неравенство

$$P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3.$$

**Доказательство** такое же, как в теореме 2 [7].

Из теоремы 3 следует, что любая схема, реализующая функцию  $f \in K$ , функционирует с ненадежностью, которая асимптотически (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) не меньше  $9\varepsilon$ .

**Вывод:** вероятности ошибок некоторых подсхем определяют нижнюю оценку ненадежности всей схемы.

#### Список литературы

1. **Васин, А. В.** О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью  $5\varepsilon$  / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.
2. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24, № 3. – С. 17–24.

3. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // *Fundamenta Informaticae*. – 2010. – Vol. 104 (3). – P. 219–225.
4. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2011. – № 3. (19). – С. 52–60.
5. **Алехина, М. А.** Синтез схем из ненадежных элементов в  $P_k$  / М. А. Алехина // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2015. – № 3 (35). – С. 3–10.
6. **Алехина, М. А.** Оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2014. – № 1 (29). – С. 5–19.
7. **Алехина, М. А.** Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта в  $P_4$  / М. А. Алехина, С. П. Каргин // *Известия высших учебных заведений. Физико-математические науки*. – 2015. – № 1 (33). – С. 37–53.
8. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высшая школа, 2001. – 384 с.

### **References**

1. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 64–79.
2. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, no. 3, pp. 17–24.
3. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae* [Fundamental informatics]. 2010, vol. 104 (3), pp. 219–225.
4. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.
5. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 3–10.
6. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1 (29), pp. 5–19.
7. Alekhina M. A., Kargin S. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 1 (33), pp. 37–53.
8. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 384 p.

---

**Алехина Марина Анатольевна**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующая кафедрой  
дискретной математики, Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alekhina@pnzgu.ru

**Alekhina Marina Anatol'evna**  
Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of discrete mathematics, Penza State  
University (40 Krasnaya street, Penza,  
Russia)

УДК 519.718

**Алехина, М. А.**

**О вероятностях ошибок в одной модели вычислений** / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 12–19.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА КОМПЛЕКСЕ ХОХШИЛЬДА ДЛЯ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Ранее автором был построен гомотопически устойчивый аналог симплициального объекта. Для данного объекта доказана теорема существования, причем доказательство теоремы конструктивно, был проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами В. Смирнова. Следующим шагом в исследовании гомотопически устойчивых аналогов является построение комплекса Хохшильда и исследование дополнительных операций на этом комплексе.

*Материалы и методы.* Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над  $Z_2$ . Данная техника часто используется в алгебраической топологии ввиду упрощения вычислений и уменьшения громоздкости конструкций. Кроме того, в большинстве случаев результаты, полученные для поля характеристики 2, верны и для случая произвольного поля.

*Результаты.* Описано основное множество комплекса Хохшильда, дано определение дифференциала, доказывается выполнение условия  $d^2=0$ . На комплексе Хохшильда вводятся дополнительные операции, исследованы их свойства и связь с дифференциалом.

*Выводы.* Введенные на комплексе Хохшильда для симплициального множества дополнительные конструкции позволят использовать комплекс для описания возможности нетривиального продолжения симплициального множества до гомотопически устойчивого аналога.

**Ключевые слова:** симплициальный объект, гомологии, гомотопическая устойчивость, комплекс Хохшильда, высшие симплициальные операторы.

М. В. Ladoshkin

## ADDITIONAL OPERATIONS ON THE HOCHSCHILD COMPLEX FOR A SIMPLICIAL SET

### Abstract.

*Background.* The process of creating analogues of algebraic structures, which are sustained during the transition to the homotopy case, has recently been a topical one in algebraic topology. Earlier, the author built a stable homotopy analogue of a simplicial object. For this object the researcher proved the existence theorem, and the proof of the theorem is constructive, as well as comparatively analyzed the obtained results with V. Smirnov's results. The next step in the study of analogues with stable homotopy is construction of the Hochschild complex and investigation of additional operations at the complex.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гранта на проведение научно-исследовательских работ по приоритетным направлениям научной деятельности вузов-партнеров по сетевому взаимодействию (ФГБОУ ВПО «ЧГПУ» и МордГПИ) по теме «Математическое моделирование поверхностных волн в средах, взаимодействующих с магнитным и электрическим полями».

*Materials and methods.* All major approvals, the design and proof of theorems are presented over a field of characteristic 2, i.e. over  $Z_2$ . This technique is often used in algebraic topology due to simplicity of calculations and reduced complexity of designs. In addition, in most cases, the results, obtained for fields of characteristic 2, are true for the case of arbitrary fields as well.

*Results.* The article describes a basic set of the Hochschild complex, defines the differential, proves fulfilment of the  $d^2=0$  condition. The work also considers additional operations, introduced on the Hochschild complex, studies their properties and relationships with the differential.

*Conclusions.* Additional structures, introduced on the Hochschild complex for simplicial sets, will allow to use the complex to describe a possibility of non-trivial continuation of a simplicial set to an analogue with stable homotopy.

**Key words:** simplicial object, homology, homotopic stability, Hochschild complex, higher simplicial operators.

### Введение

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к концу прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога градуированных и дифференциальных алгебр [1].

В работе [2] автором построен гомотопически устойчивый аналог симплициального объекта. Для данного объекта доказана теорема существования, причем доказательство теоремы конструктивно. В этой же работе проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами В. Смирнова, полученными в [3].

В представленной работе строится комплекс Хохшильда для симплициального объекта по аналогии с работами [4, 5]. Определяется основное множество комплекса Хохшильда, определяется дифференциал, доказывается выполнение условия  $ds_i = s_id$ . На комплексе Хохшильда вводятся дополнительные операции, которые позволяют использовать комплекс для описания возможности нетривиального продолжения симплициального множества до гомотопически устойчиво аналога.

Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над  $Z_2$ . Подобный прием является часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2, остаются верными и для произвольного случая.

### 1. Построение комплекса Хохшильда для симплициального объекта

Сначала напомним основное определение симплициального множества, следуя [6].

**Определение 1.** Симплициальное множество  $K$  – упорядоченный набор множеств, индексированный неотрицательными целыми числами, рассматриваемый вместе с отображениями  $\partial_i : K_q \rightarrow K_{q-1}$  и  $s_i : K_q \rightarrow K_{q+1}$ ,  $0 < i \leq q$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) } \partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \text{ если } i < j, \\
 & \text{(ii) } s_i s_j = s_{j+1} s_i \text{ если } i < j, \\
 & \text{(iii) } \partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \text{ если } i < j, \\
 & \partial_j s_j = id = \partial_{j+1} s_j, \\
 & \partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \text{ если } i > j+1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Элементы  $K_q$  будем называть  $q$ -симплексом или симплексом размерности  $q$ . Отображения  $\partial_i$  и  $s_j$  называют соответственно операторами граней и вырождений.

Приступим к описанию комплекса Хохшильда для симплициального множества. Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над  $\mathbf{Z}_2$ .

Рассмотрим цепной комплекс  $X$ , т.е. модуль  $X = \bigoplus X_i$ , где каждый  $X_i$  – модуль, снабженный последовательностью отображений  $d_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ , называемых дифференциалами, удовлетворяющих условию

$$d_i(d_{i+1}) = 0.$$

Пусть на этом цепном комплексе задана структура симплициального множества в смысле определения 1, согласованная с дифференциалом, т.е. все отображения граней и вырождений являются цепными

$$d\partial_i = \partial_i d,$$

$$ds_i = s_i d.$$

Градуировка, возникающая из определения симплициального множества, не связана с градуировкой цепного комплекса. Рассмотрим множество  $\text{Hom}(X, X)$  всех отображений цепного комплекса  $X$  в себя.

**Определение 2.** Будем обозначать  $CS(X)$  подмножество множества  $\text{Hom}(X, X)$ , образованное всеми отображениями, которые можно индексировать двумя упорядоченными наборами целочисленных индексов, т.е.

$$CS(X) = \{f \in \text{Hom}(X, X) \text{ такие, что } f = f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} : X^m \rightarrow X^{m-t+k},$$

где  $i_s, j_r$  – целые числа,  $m = \max(t, i_t)$ ,  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_t$ ;  $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$ .

Градуировка комплекса  $X$  в определении 2 берется «верхняя», т.е. из структуры симплициального множества.

Рассматривая определение 2, можно сказать, что мы выделяем из множества  $\text{Hom}(X, X)$  счетные подмножества или конечные подмножества, имеющие возможность двойной индексации целыми числами. Выбор способа индексации произволен, и подобная индексация используется исключительно для удобства работы с элементами множества  $CS(X)$ . Таким образом, единственное ограничение, накладываемое определением 2 на подмножества множества  $\text{Hom}(X, X)$ , – мощность данного подмножества.

**Определение 3.** Будем обозначать  $CS^*(X)$  множество всех возможных подмножеств  $CS(X)$ , каждое из которых имеет свою индексацию целыми числами.

Таким образом, мы будем рассматривать множество подмножеств множества  $Hom(X, X)$ , имеющее счетную мощность. Построим отображение, которое будет соответствовать дифференциалу в комплексе Хохшильда.

**Определение 4.** Определим отображение  $\delta: CS^*(X) \rightarrow CS^*(X)$  следующей формулой:

$$\delta f(x) = \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x) + (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x), \quad (2)$$

где суммирование идет по всем возможным наборам индексов (и, соответственно, отображениям  $f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x)$ ), удовлетворяющих условию  $t + k = m$ .

Следующее утверждение показывает, что отображение  $\delta$  из определения 4 является аналогом дифференциала в стандартном комплексе Хохшильда для алгебр или модулей над алгебрами.

**Теорема 1.** Отображение  $\delta$  из определения 4 удовлетворяют условию

$$\delta\delta = 0,$$

т.е. является дифференциалом.

**Доказательство.** Пусть  $x \in X^m$ ,  $f \in CS^*(X)$ .

Применяя формулу (2), имеем

$$\delta(\delta f(x)) = \delta\left(\sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x) + (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x)\right).$$

В скобках в последнем выражении стоят отображения  $f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x)$  из  $f \in CS^*(X)$ , заданные на различных симплициальных «этажах» комплекса  $X$ . Рассмотрим действие дифференциала на первое слагаемое в скобках. Получим, используя формулу (2):

$$\begin{aligned} & \delta\left(\sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x)\right) = \\ & = \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_{m-1}) \left( (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x) \right) + \\ & + \sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) \left( (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x) \right). \end{aligned}$$

Аналогично, для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned} & \delta\left(\sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x)\right) = \\ & = \sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) \left( (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(x) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) \left( (s_0 + s_1 + \dots + s_{m+1}) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} \right) (x).$$

Так как в результате суммирования будут перебраны все возможные индексации для отображений  $f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} (x)$ , то мы можем объединить все суммирования в одно, вынеся за скобки элемент  $(x)$ . Получим выражение

$$\begin{aligned} \delta(\delta f(x)) = & \sum \left( (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_{m-1})(\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) + \right. \\ & (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m)(s_0 + s_1 + \dots + s_m) + (s_0 + s_1 + \dots + s_m)(\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) + \\ & \left. + (s_0 + s_1 + \dots + s_m)(s_0 + s_1 + \dots + s_{m-1}) \right) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} (x). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\begin{aligned} & \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_{m-1})(\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) + \\ & + (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m)(s_0 + s_1 + \dots + s_m) + \\ & + (s_0 + s_1 + \dots + s_m)(\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) + (s_0 + s_1 + \dots + s_m)(s_0 + s_1 + \dots + s_{m-1}). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем следующие суммы:

$$\sum \partial_i \partial_j + \sum \partial_i s_j + \sum s_i \partial_j + \sum s_i s_j, \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем наборам пар индексов, меняющихся в соответствующих пределах. Рассмотрим первую сумму. В ней будет четное число слагаемых. Так, первый индекс меняется от нуля до  $m$ , второй – от нуля до  $(m - 1)$ . Для каждой пары найдется выражение, соответствующее ей по соотношениям (i) для симплицальных граней из формулы (1). Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\sum \partial_i \partial_j = 0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для последнего слагаемого в формуле (4), касающегося симплицальных вырождений. В нем также будет четное число слагаемых, так как первый индекс меняется от нуля до  $m$ , второй – от нуля до  $(m + 1)$ . Используя соотношения (ii) для симплицальных соотношений из формулы (1), получаем

$$\sum s_i s_j = 0.$$

Рассматривая два последних слагаемых, мы получим, что число слагаемых в них одинаково, причем слагаемых, которых по соотношениям (iii), связывающим симплицальные грани и вырождения в формуле (1), равных тождественному отображению, будет также четное число. Таким образом, учитывая, что все доказательство мы проводим над полем характеристики 2, получаем

$$\sum \partial_i s_j + \sum s_i \partial_j = 0.$$

Подставляя все полученные условия в формулу (3), получим

$$\delta(\delta f(x)) = 0,$$

что и требовалось показать.

**Определение 5.** Множество  $CS^*(X)$  из определения 3 вместе с отображением  $\delta$  из определения 4 будем называть комплексом Хохшильда для симплицального множества.

Термин «комплекс Хохшильда» употребляется в данном случае по аналогии с комплексом Хохшильда для алгебр или модулей. Смысл аналогии заключается в использовании гомологий данного комплекса для описания возможности продолжения симплицального множества до гомотопически устойчивого аналога. Хотя структура комплекса Хохшильда значительно отличается от такого рода комплексов в случае алгебр и модулей над ними, однако это различие обуславливается отличием в структуре симплицального множества и дифференциальных алгебр и модулей над алгебрами.

## 2. Описание дополнительной операции на комплексе Хохшильда для симплицальных множеств и ее связь с действием дифференциала

Проводя аналогии с ранее построенными комплексами Хохшильда в [4, 5], введем на  $CS^*(X)$  вспомогательную операцию, которая будет затем использована для создания теории продолжений. Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел  $i_1, \dots, i_k$ , в которой каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел.

**Определение 6.** Будем обозначать  $t(i_j)$  для числа  $i_j$ , входящего в  $i_1, \dots, i_k$ , если  $i_{r_1} < i_j, \dots, i_{r_t} < i_j$  и  $r_1 > j, \dots, r_t > j$ . Другими словами,  $t$  – количество чисел  $i_{r_1} < i_s$ , стоящих правее  $i_s$ . Также можно сказать, что  $t(i_j)$  – число инверсий в подстановке  $(i_1, \dots, i_k)$ , соответствующих элементу  $i_j$ .

**Определение 7.** Будем обозначать  $\tilde{i}_j$  для числа  $i_j$ , входящего в  $i_1, \dots, i_k$ , если  $\tilde{i}_j = i_j - t$ , где  $t$  вычисляется согласно определению 6.

**Определение 8.** Будем обозначать  $\hat{i}_j$  для числа  $i_j$ , входящего в  $i_1, \dots, i_k$ , если  $\hat{i}_j = i_j + t$ , где  $t$  вычисляется согласно определению 6.

**Определение 9.** Пусть  $f \in CS^*(X)$ . Определим операцию  $\nabla : CS^*(X) \rightarrow CS^*(X)$  по следующему правилу:

$$\nabla f = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)} r_{\hat{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \hat{\sigma}(i_n)} = 0, \quad (5)$$

где суммирование идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы  $S_k$ , а во втором – по множеству  $I_\sigma$  всех разбиений набора  $(\tilde{\sigma}(i_1), \tilde{\sigma}(i_2), \dots, \tilde{\sigma}(i_n))$  или  $(\hat{\sigma}(i_1), \hat{\sigma}(i_2), \dots, \hat{\sigma}(i_n))$  на два строго упорядоченных блока  $(\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_k))$  и  $(\tilde{\sigma}(i_{k+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_t))$  или  $((\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_k))$  и  $(\hat{\sigma}(i_{k+1}), \dots, \hat{\sigma}(i_t))$ ), т.е. блоки, в которых выполняется условие  $\tilde{\sigma}(i_1) <$

$\langle \tilde{\sigma}(i_2) < \dots < \tilde{\sigma}(i_k)$  и  $\tilde{\sigma}(i_{k+1}) < \tilde{\sigma}(i_{k+2}) < \dots < \tilde{\sigma}(i_n)$  (или  $\hat{\sigma}(i_1) < \hat{\sigma}(i_2) < \dots < \hat{\sigma}(i_k)$  и  $\hat{\sigma}(i_{k+1}) < \hat{\sigma}(i_{k+2}) < \dots < \hat{\sigma}(i_n)$ ); символ  $\tilde{\sigma}(i_1)$  рассматривается в смысле определения 3; символ  $\hat{\sigma}(i_1)$  рассматривается в смысле определения 5.

Символ  $r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)}$  будет иметь в данной формуле различное значение в зависимости от значений входящих в него индексов, а именно:

$$r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)} = \begin{cases} f_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)}, & \text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ f_{\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_t)}, & \text{если } \sigma(s_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ f_{\tilde{\sigma}(s_1), \dots, \tilde{\sigma}(s_t)}, & \text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ f_{\tilde{\sigma}(p_1), \dots, \tilde{\sigma}(p_t)}, & \text{если } \sigma(p_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k. \end{cases}$$

Определим связь построенного отображения  $\nabla$  с дифференциалом  $\delta$  в комплексе Хохшильда для симплициальных множеств  $CS^*(X)$ . Эта связь может быть сформулирована в следующем утверждении.

**Теорема 2.** Пусть  $CS^*(X)$  комплекс Хохшильда для симплициальных множеств с дифференциалом  $\delta$ . Тогда справедлива следующая формула:

$$\delta \nabla f = \nabla \delta f, \quad (6)$$

т.е. отображение  $\nabla$  из определения 9 является цепным в комплексе Хохшильда для симплициальных множеств.

**Доказательство.** Применяя к левой части доказываемого равенства определение отображения  $\nabla$ , получаем

$$\delta \nabla f = \delta \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} \cdot$$

Применяя определение дифференциала в комплексе Хохшильда, получим

$$\delta \nabla f = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} \delta r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} \cdot$$

Учитывая определение символов  $r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)}$  из определения (9), мы можем применить определение дифференциала к каждому из  $r_{\tilde{\sigma}(i_1), \dots, \tilde{\sigma}(i_t)}$ . Получим

$$\delta \nabla f = \sum ((\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} + (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k}) r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} \cdot$$

Суммирование в данной формуле идет по всем возможным разбиениям на блоки, удовлетворяющим условиям определения (9), а также по всем симплициальным граням и вырождениям, участвующим в определении (4) дифференциала в комплексе Хохшильда.

Учитывая индексы суммирования, мы можем записать последнюю формулу в виде

$$\delta \nabla f = \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} + \\ + \sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)}. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства (6). Применяя к нему определение 12, получаем

$$\nabla \delta f = \nabla \left( \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} (x) + (s_0 + s_1 + \dots + s_m) f_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} (x) \right).$$

Так как в каждом слагаемом стоят элементы из  $CS^*(X)$ , то к ним можно применить определение (9) отображения  $\nabla$ . При этом разбивка каждого индексированного отображения может быть проведена только для второго сомножителя, поскольку первый разбиению не поддается. Поэтому получаем выражение

$$\nabla \delta f = \sum (\partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_m) r_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)} + \\ + \sum (s_0 + s_1 + \dots + s_m) r_{i_1, i_2, \dots, i_t}^{j_1, j_2, \dots, j_k} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}), \dots, \tilde{\sigma}(i_n)},$$

которое отличается от выражения (7) только обозначениями и порядком суммирования. Поскольку суммирование в обоих случаях идет по всем возможным разбиениям, то оба выражения будут идентичными. Приведенные соображения доказывают справедливость формулы (6), а вместе с тем и всей теоремы.

### Заключение

В рамках данной статьи автором было рассмотрено построение комплекса Хохшильда для симплициального объекта. Доказана теорема о корректности введенного обозначения для отображения  $\delta$ . Введена дополнительная операция на комплексе Хохшильда, которая является цепным отображением. Ее введение позволит связать построенный комплекс Хохшильда с продолжениями симплициальных объектов посредством аппарата скрещивающих коцепей и гомологий, что является целью дальнейших исследований.

### Список литературы

1. **Кадеишвили, Т. В.** К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 35, № 3 (213). – С. 183–188.
2. **Ладошкин, М. В.** Построение аналога симплициальных вырождений в  $A_\infty$ -случае / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 80–89.
3. **Смирнов, В. А.**  $A_\infty$ -симплициальные объекты и  $A_\infty$ -топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 913–919.
4. **Ладошкин, М. В.**  $A_\infty$ -модули над  $A_\infty$ -алгебрами и когомологии Хохшильда для модулей над алгебрами / М. В. Ладошкин // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 5. – С. 717–728.

5. **Ладошкин, М. В.** Структура  $A_\infty$ -модуля над алгеброй многочленов в кольцах Стенли – Райснера / М. В. Ладошкин // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 224–231
6. **May, J. P.** Simplicial objects in algebraic topology / J. P. May. – Van Nostred, Math. Studies. – 1967. – Vol. 11. – 162 p.

#### **References**

1. Kadeishvili T. V. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1980, vol. 35, no. 3 (213), pp. 183–188.
2. Ladoshkin M. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 2 (18), pp. 80–89.
3. Smirnov V. A. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1999, vol. 66, no. 6, pp. 913–919.
4. Ladoshkin M. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2006, vol. 79, no. 5, pp. 717–728.
5. Ladoshkin M. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2007, vol. 82, no. 2, pp. 224–231
6. May J. P. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostred, Math. Studies. 1967, vol. 11, 162 p.

---

**Ладошкин Михаил Владимирович**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики и методики  
обучения математике, Мордовский  
государственный педагогический  
институт имени М. Е. Евсевьева  
(Россия, г. Саранск,  
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: michldosh@gmail.com

**Ladoshkin Mikhail Vladimirovich**  
Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-department  
of mathematics and mathematics teaching  
technique, Mordovia State Pedagogical  
Institute named after M. E. Evseyev  
(11a Studencheskaya street,  
Saransk, Russia)

---

УДК 512.662.1517.977

**Ладошкин, М. В.**

**Дополнительные операции на комплексе Хохшильда для симплициального множества** / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 20–28.

А. В. Пожидаев, Н. М. Пекельник,  
О. И. Хаустова, И. А. Трефилова

## О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГАММА-ФУНКЦИИ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Одной из важнейших функций, выраженных несобственным интегралом, содержащим параметр, является гамма-функция. Она естественно возникает во многих областях современной математики и приложениях. Особая роль этой функции в математическом анализе определяется тем, что через нее выражаются важные определенные интегралы, суммы рядов и бесконечные произведения. В последнее время усилия многих авторов направлены на получение различных оценок этой функции. Цель настоящей работы состоит в получении одного из возможных разложений гамма-функции в бесконечное произведение и анализ этого представления.

*Материалы и методы.* Используются подходящие интегральные представления функций, различные свойства сходящихся несобственных интегралов с параметром и их предельное поведение. При этом применяется метод математической индукции.

*Результаты и выводы.* Получено определенное представление гамма-функции в виде бесконечного произведения в некоторой точке. Анализ полученных результатов позволил установить связь между гамма-функцией и распределением Пуассона.

**Ключевые слова:** гамма-функция, константа Эйлера, бесконечное произведение, дифференцирование несобственного интеграла по параметру, двусторонние оценки гамма-функции, предельное поведение интеграла.

A. V. Pozhidaev, N. M. Pekelnik,  
O. I. Khaustova, I. A. Trefilova

## SOME REPRESENTATIONS OF THE GAMMA FUNCTION

### Abstract.

*Background.* One of the most important functions, expressed by an improper integral containing a parameter, is the gamma function. It occurs naturally in many areas of modern mathematics and applications. The special role of this function in mathematical analysis is that some important definite integrals, infinite series and infinite products are expressed through it. In recent years, the efforts of many authors have been aimed at getting different estimates of this function. The purpose of this paper is to make one of the possible decompositions of the gamma function into an infinite product and the analysis of this representation.

*Materials and methods.* The authors used suitable integral representations of functions, various properties of convergent improper integrals with a parameter and their behavior in the limit. Herewith, the method of mathematical induction was applied.

*Results and conclusions.* The researchers have obtained some representation of the gamma function as an infinite product at some point. The analysis of the obtained results allowed to establish a connection between the gamma function and the Poisson distribution.

**Key words:** gamma function, Euler's constant, infinite product, differentiation of an improper integral by a parameter, two-sided estimates of the gamma function, behavior of an integral in the limit.

### Введение

Гамма-функция Эйлера при  $x > 0$  задается формулой

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1)$$

Это соотношение было получено Адриен Мари Лежандром из оригинального определения Леонарда Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{\tau} \right)^{x-1} d\tau$$

при помощи замены  $t = \ln \frac{1}{\tau}$ .

В настоящее время именно соотношение (1) Лежандра рассматривается как классическое определение гамма-функции. Ему же принадлежит название и обозначение  $\Gamma(x)$ .

Важнейшая роль гамма-функции в математическом анализе определяется тем, что через нее выражаются многие известные определенные интегралы, бесконечные произведения и суммы рядов. Кроме того, она широко используется в теории специальных функций, аналитической теории чисел, математической статистике и других областях математики. Среди работ, посвященных гамма-функции, выделим классические [1, 2]. Отметим также очень полезную статью Г. К. Srinivasan [3], где приведена подробная историческая справка и изложены основные свойства гамма-функции.

В последние годы усилия многих авторов направлены на установление различных неравенств для гамма-функции. Укажем, например, на двойное неравенство, полученное в 2007 г. X. Li и Ch. P. Chen в работе [4]:

$$\frac{x^{x-\gamma}}{e^{x-1}} < \Gamma(x) < \frac{x^{x-\frac{1}{2}}}{e^{x-1}},$$

где  $\gamma = 0,577215\dots$  – эйлерова константа.

Кроме того, отметим оценки, полученные в [5]:

$$\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y e} \leq \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \leq \frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y}.$$

Много других интересных неравенств получено в статьях [6–10].

### 1. Формулировка основных результатов

Целью настоящей работы является получение разложения гамма-функции в виде бесконечного произведения в точке  $\frac{q}{p}$ , где  $0 < q < p$ . Кроме того, будет установлена связь между гамма-функцией и распределением Пуассона.

Сформулируем основные результаты данной работы.

**Теорема 1.1.** При  $0 < q < p$  справедливо равенство

$$\Gamma\left(\frac{q}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot n^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (2)$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на подходящее интегральное представление функций и различные свойства сходящихся несобственных интегралов с параметром. Отметим, что в [1] приведена формула

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

При этом вывод этого равенства основывался на логарифмической выпуклости интеграла (1).

Хорошо известно, что гамма-функция естественно возникает во многих важных статистических распределениях. Например, плотности распределений Стьюдента и хи-квадрат имеют соответственно вид

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

где  $n, k$  – число степеней свободы.

Среди других распределений, содержащих гамма-функцию, можно отметить бета-распределение, распределение Вейбулла и гамма-распределение.

Следующее утверждение показывает, что гамма-функция тесно связана не только со статистическими, но и дискретными вероятностными распределениями.

**Теорема 1.2.** При  $\lambda < 1$  имеет место соотношение

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = n-1) \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right) (ne)^\lambda \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}, \quad (3)$$

где  $\xi$  – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ .

## 2. Доказательство теоремы 1.1

Предварительно сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.1.** При наложенных ограничениях на  $p$  и  $q$  справедливо равенство

$$\int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{x^p + y^p} dy = \frac{1}{x^{p-q}} \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Запишем левую часть соотношения (4) в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{x^p + y^p} dy = \frac{1}{x^p} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p} dy = \frac{x^q}{x^p} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{q-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p} d\frac{y}{x}. \quad (5)$$

Согласно [11]

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt = \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (6)$$

Таким образом, из (5) и (6) вытекает равенство (4).

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что при  $x \geq a > 0$  интеграл в левой части (4) не имеет особенностей в нуле и на бесконечности. Кроме того, выполнены все условия, обеспечивающие возможность дифференцирования по  $x$  под знаком интеграла.

Дифференцируя обе части равенства (4), имеем

$$-p x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^2} dy = -(p-q) \frac{1}{x^{p-q+1}} \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^2} dy = \frac{p-q}{p} \cdot \frac{1}{x^{2p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (7)$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$-2p x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^3} dy = -(2p-q) \cdot \frac{1}{x^{2p-q+1}} \cdot \frac{p-q}{p} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^3} dy = \frac{(p-q)(2p-q)}{p \cdot 2p} \cdot \frac{1}{x^{3p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (8)$$

Равенства (7), (8) позволяют предположить, что справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.2.** При наложенных ограничениях на  $p$  и  $q$  справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^n} dy = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot \frac{1}{x^{n p - q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (9)$$

**Доказательство.** Соотношения (7), (8) показывают, что равенство (9) выполняется для  $n = 2, 3$ . Предположим, что оно справедливо для  $n = k$ . Покажем, что (9) будет выполняться для  $n = k + 1$ .

Положим в (9)  $n = k$  и продифференцируем обе части по  $x$ , тогда

$$\begin{aligned} & -k \cdot p \cdot x^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^{k+1}} dy = \\ & = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((k-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (k-1)p} \cdot (-(kp-q)) \cdot \frac{1}{x^{kp-q+1}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(x^p + y^p)^{k+1}} dy = \\ & = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((k-1)p-q) \cdot (kp-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (k-1) \cdot kp} \cdot \frac{1}{x^{(k+1)p-q}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \end{aligned}$$

Лемма 2.2 доказана.

Положим в (9)  $x = \sqrt[p]{n}$ . При этом значении  $x$  соотношение (9) принимает вид

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^n} dy = \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)} \cdot \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}. \quad (10)$$

Исследуем предельное поведение при  $n \rightarrow \infty$  интеграла в левой части (10).

**Лемма 2.3.** При  $0 < q < p$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{\left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^n} dy = \int_0^{\infty} y^{q-1} e^{-y^p} dy. \quad (11)$$

**Доказательство.** Используя свойство интеграла и неравенство треугольника, для любого  $L > 0$  получаем

$$\left| \int_0^{\infty} y^{q-1} \left( \left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^{-n} - e^{-y^p} \right) dy \right| \leq \int_0^{\infty} \left| y^{q-1} \left( \left(1 + \frac{y^p}{n}\right)^{-n} - e^{-y^p} \right) \right| dy \leq$$

$$\leq \int_0^L \left| y^{q-1} \left( \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right) \right| dy + \int_L^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy + \int_L^\infty y^{q-1} \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} dy. \quad (12)$$

При  $\alpha > 0$  справедливо неравенство  $(1 + \alpha)^n > n\alpha$ . Поэтому последнее слагаемое в правой части (12) допускает оценку

$$\int_L^\infty y^{q-1} \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} dy \leq \int_L^\infty \frac{1}{y^{p-q+1}} dy. \quad (13)$$

Так как  $p > q$ , то интеграл в правой части (13) не имеет особенности на бесконечности. Следовательно,

$$\int_L^\infty \frac{1}{y^{p-q+1}} dy = -\frac{1}{p-q} \cdot \frac{1}{y^{p-q}} \Big|_L^\infty = \frac{1}{(p-q)L^{p-q}}. \quad (14)$$

Несобственный интеграл  $\int_0^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy$  сходится, и выполняются соотношения (13), (14). Поэтому для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $L$  столь большим, что

$$\int_L^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy + \frac{1}{(p-q)L^{p-q}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

По второму замечательному пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} = e^{-y^p}$ . Следовательно, можно выбрать  $n$  настолько большим, что

$$\int_0^L \left| y^{q-1} \left( \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right) \right| dy \leq L^{q-1} \int_0^L \left| \left( 1 + \frac{y^p}{n} \right)^{-n} - e^{-y^p} \right| dy < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Утверждение леммы 2.3 следует из неравенства (12) и оценок (15), (16). Опираясь на утверждения лемм 2.1–2.3, завершим доказательство теоремы 1.1.

Согласно [11] имеем

$$\int_0^\infty y^{q-1} e^{-y^p} dy = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{q}{p}\right), \quad (17)$$

где  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  – гамма-функция.

Из (10), (11), (17) получаем, что

$$\frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{q}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-q)(2p-q)(3p-q)\dots((n-1)p-q)}{p \cdot 2p \cdot 3p \dots (n-1)p} \cdot n^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{p \sin \frac{\pi q}{p}}.$$

Теорема 1.1 доказана.

### 3. Доказательство теоремы 1.2

Положим в равенстве (2)  $q = 1$ ,  $\frac{1}{p} = \lambda$ , тогда

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right)}{(n-1)!} \cdot n^\lambda \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi},$$

отсюда

$$(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right)}{(n-1)!} \cdot (ne)^\lambda \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}. \quad (18)$$

Пусть  $\xi = \xi(\omega)$  – дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , тогда

$$P(\xi = n-1) = \frac{\lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda}}{(n-1)!}, \quad (19)$$

где  $P(A)$  – вероятность события  $A$ .

Соотношение (19) позволяет равенство (18) записать в виде

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = n-1) \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{\lambda} - 1\right) (ne)^\lambda \cdot \frac{\pi}{\sin \lambda \pi}.$$

Теорема 1.2 доказана.

### Список литературы

1. **Артин, Э.** Введение в теорию гамма-функций : пер. с нем. / Э. Артин. – Изд. 2-е. – М. : Либроком, 2009. – 40 с. – (Физико-математическое наследие: математика (теория функций)).
2. **Davis, P. J.** Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function / P. J. Davis // American Mathematical Monthly. – 1959. – Vol. 66, № 10. – P. 849–869.
3. **Srinivasan, G. K.** The gamma function: An Eclectic Tour / G. K. Srinivasan // American Mathematical Monthly. – 2007. – Vol. 114, № 4. – P. 297–315.
4. **Li, X.** Inequalities for the gamma function / X. Li, Ch.-P. Chen // Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 8, № 1.
5. **Song-Zhimin.** On some new inequalities for the Gamma function / Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li // Octagon mathematical magazine. – 2009. – Vol. 17, № 1. – P. 14–18.

6. **Alzer, H.** Monotonicity properties of the gamma function / H. Alzer, N. Batir // *Applied Mathematics Letters*. – 2007. – Vol. 20, Iss. 7. – P. 778–781.
7. **Alzer, H.** On Ramanujan's double inequality for the gamma function / H. Alzer // *Bulletin of the London Mathematical Society*. – 2003. – Vol. 35, № 5. – P. 601–607.
8. **Batir, N.** Some new inequalities for gamma and polygamma functions / N. Batir // *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. – 2005. – Vol. 6, № 4.
9. **Grinshpan, A. Z.** Completely monotonic function involving the gamma and q-gamma functions / A. Z. Grinshpan, M.E.H. Ismail // *Proceedings of the American Mathematical Society*. – 2006. – Vol. 134, № 4. – P. 1153–1160.
10. **Qui, S. L.** Some properties of gamma and psi functions with applications / S. L. Qui, M. Vuorinen // *Mathematics of Computation*. – 2005. – Vol. 74, № 250. – P. 723–742.
11. **Двайт, Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт ; пер. с англ. Н. В. Леви ; под ред. К. А. Семендяева. – Изд. 10-е, стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2009. – 232 с.

### **References**

1. Artin E. *Vvedenie v teoriyu gamma-funktsiy: per. s nem.* [Introduction into theory of gamma functions: translation from German]. Ed. 2nd. Moscow: Librokom, 2009, 40 p. (Fiziko-matematicheskoe nasledie: matematika (teoriya funktsiy)) [Physical and mathematical heritage: mathematics (theory of functions)].
2. Davis P. J. *American Mathematical Monthly*. 1959, vol. 66, no. 10, pp. 849–869.
3. Srinivasan G. K. *American Mathematical Monthly*. 2007, vol. 114, no. 4, pp. 297–315.
4. Li X., Chen Ch.-P. *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2007, vol. 8, no. 1.
5. Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li *Octagon mathematical magazine*. 2009, vol. 17, no. 1, pp. 14–18.
6. Alzer H., Batir N. *Applied Mathematics Letters*. 2007, vol. 20, iss. 7, pp. 778–781.
7. Alzer H. *Bulletin of the London Mathematical Society*. 2003, vol. 35, no. 5, pp. 601–607.
8. Batir N. *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. 2005, vol. 6, no. 4.
9. Grinshpan A. Z., Ismail M.E.H. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2006, vol. 134, no. 4, pp. 1153–1160.
10. Qui S. L., Vuorinen M. *Mathematics of Computation*. 2005, vol. 74, no. 250, pp. 723–742.
11. Dvayt G. B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of integrals and other mathematical formulas]. Transl. from English N. V. Levi. Saint-Petersburg; Moscow; Krasnodar: Lan', 2009, 232 p.

---

**Пожидаяев Александр Васильевич**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей математики, Сибирский  
государственный университет путей  
сообщения (Россия, г. Новосибирск,  
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: math@stu.ru

**Pozhidaev Aleksandr Vasil'evich**  
Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of higher mathematics, Siberia State  
University of Railway Transportation  
(191 D. Kovalchuk street,  
Novosibirsk, Russia)

**Пекельник Наталья Михайловна**

кандидат педагогических наук, доцент,  
кафедра высшей математики, Сибирский  
государственный университет путей  
сообщения (Россия, г. Новосибирск,  
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: pekelniknm@mail.ru

***Pekel'nik Natal'ya Mikhaylovna***

Candidate of pedagogical sciences,  
associate professor, sub-department  
of higher mathematics, Siberia State  
University of Railway Transportation (191  
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

**Хаустова Олеся Игоревна**

кандидат педагогических наук, доцент,  
кафедра высшей математики, Сибирский  
государственный университет путей  
сообщения (Россия, г. Новосибирск,  
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: lex711@yandex.ru

***Khaustova Olesya Igorevna***

Candidate of pedagogical sciences,  
associate professor, sub-department  
of higher mathematics, Siberia State  
University of Railway Transportation (191  
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

**Трефилова Ирина Александровна**

преподаватель, кафедра высшей  
математики, Сибирский  
государственный университет путей  
сообщения (Россия, г. Новосибирск,  
ул. Д. Ковальчук, 191)

E-mail: koja@mail.ru

***Trefilova Irina Aleksandrovna***

Lecturer, sub-department of higher  
mathematics, Siberia State University  
of Railway Transportation (191  
D. Kovalchuk street, Novosibirsk, Russia)

---

УДК 517.581

**Пожидаев, А. В.**

**О некоторых представлениях гамма-функции** / А. В. Пожидаев,  
Н. М. Пекельник, О. И. Хаустова, И. А. Трефилова // Известия высших учеб-  
ных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. –  
№ 4 (36). – С. 29–37.

## МЕТОД СИНТЕЗА НЕИЗБЫТОЧНЫХ СХЕМ В БАЗИСЕ ЖЕГАЛКИНА, ДОПУСКАЮЩИХ ЕДИНИЧНЫЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛИНЫ ОДИН<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Тестирование схем из функциональных элементов – важная теоретическая задача, имеющая практические приложения к тестированию и верификации СБИС. Целью данной работы является демонстрация возможности построения для произвольной булевой функции схемы из функциональных элементов, реализующей эту функцию и допускающей короткий единичный диагностический тест при инверсных неисправностях на выходах элементов.

*Материалы и методы.* При получении основных результатов использовались методы синтеза схем, основанных на разложении булевой функции в полином Жегалкина.

*Результаты.* Устанавливается, что для произвольной булевой функции  $f$ , зависящей от  $n$  переменных, существует избыточная реализующая функцию  $f$  схема из функциональных элементов в базисе  $\{x \& y, x \oplus y, 1\}$ , допускающая единичный диагностический тест длины 1 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

**Ключевые слова:** схема из функциональных элементов, диагностический тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона, легко-тестируемая схема.

D. S. Romanov

## A METHOD OF SYNTHESIS OF IRREDUNDANT CIRCUITS (IN ZHEGALKIN'S BASIS) ADMITTING SINGLE FAULT DIAGNOSTIC TEST SETS WITH CARDINALITY 1

### Abstract.

*Background.* Testing of combinational circuits is an important theoretical problem with applications to testing and verification of VLSI. The aim of this work is to demonstrate that for an arbitrary Boolean function it is possible to construct a circuit realizing this function and allowing a small single fault diagnosing test set (under inverse faults at outputs of gates).

*Materials and methods.* Circuit design methods based on Zhegalkin polynomials (canonical Reed-Muller polynomial forms) were used.

*Results.* It has been established that for an arbitrary Boolean function  $f$ , depending on  $n$  variables, there exists an irredundant combinational circuit (in the basis  $\{x \& y, x \oplus y, 1\}$ ) realizing  $f$  and admitting the single fault diagnosing test set (under inverse faults at outputs of gates).

**Key words:** combinational circuit, fault diagnostic test set, inverse fault at output of gate, Shannon function, easily testable circuit.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-07474-а и № 13-01-00958-а).

Схемы из функциональных элементов (СФЭ) – одна из классических моделей управляющих систем без памяти. Анализ функционирования СФЭ при возникновении в них неисправностей традиционно осуществляется с помощью тестового подхода, предложенного в работах С. В. Яблонского и И. А. Чегис [1, 2] в середине 1950-х гг. В рамках этого подхода предполагается, что на схему  $S$  с входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , реализующую булеву функцию или систему булевых функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , действует источник неисправностей  $U$ , способный преобразовать схему  $S$  к одной из СФЭ (с такими же входами и выходами, что и у  $S$ ) некоторого заранее известного списка  $H$  конечной длины, содержащего и исходную схему. Действие источника неисправностей однократное в том смысле, что во время исследования схемы источник неисправностей уже перестал действовать на схему. Исследование схемы заключается в подаче на входы схемы входных наборов и в изучении выходных значений на этих наборах. Множество  $T$  входных наборов называется *проверяющим тестом* для схемы  $S$  относительно источника неисправностей  $U$  тогда и только тогда, когда для любой схемы  $S_1$  из списка  $H$  имеет место импликация: если  $S_1$  реализует некоторую булеву функцию или систему булевых функций  $f_1$ , неравную  $f$ , то найдется набор  $\tilde{\alpha}$  из  $T$  такой, что  $f_1(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha})$ . Множество  $T$  входных наборов называется *диагностическим тестом* для схемы  $S$  относительно источника неисправностей  $U$  тогда и только тогда, когда для любых двух схем  $S_1, S_2$  из списка  $H$  имеет место импликация: если  $S_1$  и  $S_2$  реализуют неравные булевы функции или системы булевых функций  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, то найдется набор  $\tilde{\alpha}$  из  $T$  такой, что  $f_1(\tilde{\alpha}) \neq f_2(\tilde{\alpha})$ . Число наборов в тесте  $T$  называется *длиной теста* и обозначается  $L(T)$ . Тест минимальной длины называется *минимальным*. Источник неисправностей  $U$ , способный вызвать поломку не более чем одного элемента схемы, называется *единичным*; тесты относительно такого источника также называются *единичными*. Тесты относительно источника, способного вызвать произвольное число поломок элементов, называются *полными*. Схема  $S$  при любой неисправности, под действием источника неисправностей  $U$  реализующая функцию или систему функций, неравную функции или системе функций, реализуемой схемой  $S$  при отсутствии неисправностей, называется *тестопригодной* относительно источника неисправностей  $S$ . Схема, тестопригодная относительно единичного источника неисправностей, называется *неизбыточной* [3, с. 110–111; 4, с. 15–16]. Под длиной минимального проверяющего (диагностического) теста для булевой функции или системы функций  $f$ , реализованной с помощью СФЭ в базисе  $B$ , относительно источника неисправностей  $U$  понимается величина  $L_B^{detect}(U, f)$ , равная минимуму по всем тестопригодным реализующим  $f$  СФЭ  $S$  в базисе  $B$  минимума по всем проверяющим (соответственно диагностическим) тестам  $T$  для  $S$  относительно  $U$  величины  $L(T)$ . Пусть  $\hat{P}_2(n)$  – множество всех булевых функций, существенно зависящих от всех своих  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . *Функцией Шеннона* длины проверя-

ющего (диагностического) теста для реализованной с помощью СФЭ в базисе  $B$  булевой функции  $f$  относительно источника неисправностей  $U$  называется величина  $L_B^{detect}(U, n) = \max_{f \in \tilde{P}_2(n)} L_B^{detect}(U, f)$  (соответственно величина

$$L_B^{diagn}(U, n) = \max_{f \in \tilde{P}_2(n)} L_B^{diagn}(U, f)).$$

Неисправность в некотором месте схемы (на входе схемы или функционального элемента или на выходе функционального элемента) называется константной, если для каждого входного набора значение, вычисляемое в этом месте, заменяется на какую-то константу. Неисправность в некотором месте схемы называется инверсной, если значение, вычисляемое в этом месте при отсутствии данной неисправности (все остальные неисправности в схеме, если они есть, при этом сохраняются), заменяется на противоположное. Условимся о следующих обозначениях для источников неисправностей в СФЭ. Обозначение для источника неисправностей будет иметь вид  $X_z^y$ , где  $X$  – одна или несколько заглавных латинских букв, указывающих на место возможной неисправности ( $P$  – неисправности на входах схем,  $I$  – на входах функциональных элементов,  $O$  – на выходах функциональных элементов),  $y$  – название типа неисправности ( $const$ ,  $0$ ,  $1$  – константные неисправности, константные неисправности типа  $0$  и константные неисправности типа  $1$  соответственно,  $inv$  – инверсные неисправности),  $z$  указывает на число возможных неисправностей ( $k$ , если неисправностей не больше  $k$ ; нижний индекс отсутствует, если ограничений на число неисправных элементов в схеме нет).

Приведем обзор некоторых работ, связанных с оценками функций Шеннона длин тестов для СФЭ. В классической работе С. М. Редди [5] было доказано, что в базисе Жегалкина  $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$  имеют место неравенства:

$$1) L_{B_1}^{detect}(IO_1^{const}, n) \leq n + 4 \text{ (формально говоря, в [5] это доказывалось}$$

при введении одного дополнительного входа, однако в [3, с. 113–116] указанная оценка понижена до  $n + 3$  без введения дополнительного входа);

$$2) L_{B_1}^{detect}(PIO_1^{const}, n) \leq 3n + 4 \text{ (в [5] отмечалось, что, введя два допол-}$$

нительных выходы, можно понизить верхнюю оценку до  $n + 4$ ).

В статье [6] доказано следующее неравенство:

$$L_{B_1}^{detect}(IO_k^{const}, n) \leq 4 + \sum_{j=1}^{\lfloor \log 2k \rfloor} \binom{n}{j}$$

(формально говоря, в [6] это доказывалось при введении одного дополнительного входа, однако техникой из [3, с. 113–116] указанная оценка доказывалась без введения дополнительного входа). Н. П. Редькиным были получены следующие результаты:

1) для произвольного полного конечного базиса  $B$  была найдена [7, 8]

$$\text{верхняя оценка: } L_B^{detect}(O^{const}, n) \leq 2(2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil} + n);$$

$$2) L_{B_0}^{detect}(I^0, n) = L_{B_0}^{detect}(I^1, n) \leq O(2^{n/2}) \quad [9];$$

$$3) L_{B_0}^{detect}(O^0, n) = L_{B_0}^{detect}(O^1, n) \leq n \quad [10];$$

$$4) L_{B_0}^{diagn}(O_1^0, n) = L_{B_0}^{diagn}(O_1^1, n) \leq 2n + 1 \quad [11];$$

5) в бесконечном базисе  $B_0^\infty = \{\bar{x}\} \cup \bigcup_{i \geq 2} \{x_1 \& \dots \& x_i, x_1 \vee \dots \vee x_i\}$  имеет

$$\text{место неравенство [12]: } L_{B_0^\infty}^{diagn}(O_1^0, n) = L_{B_0^\infty}^{diagn}(O_1^1, n) \leq 2 \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1.$$

В работе [13] доказано, что

$$L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq n + 1 \quad [13, \text{теорема 2}], \quad L_{B_1}^{diagn}(O^{inv}, n) \leq 2^{n-2}.$$

В работах [14–16] установлено, что для любого  $n \in N$  в произвольном полном базисе  $B$  имеет место оценка  $L_B^{detect}(O_1^{const}, n) \leq n + 3$ . В статье [17] для каждой булевой функции  $f(\bar{x}^n)$  установлено существование в произвольном полном базисе схемы  $S$  с тремя дополнительными входами и одним дополнительным выходом такой, что функция  $f$  является подфункцией одной из двух функций, реализуемой схемой  $S$ , а длина теста, проверяющего не более чем  $k$  произвольных неисправностей элементов или блоков схемы, ведет себя как  $O(n + 2^k)$ . В работе [18] доказано, что в бесконечном базисе  $B_1^\infty = \{x \oplus y, 1\} \cup \bigcup_{i \geq 2} \{x_1 \& \dots \& x_i, x_1 \vee \dots \vee x_i\}$  с  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  дополнительными входами можно строить тестопригодные схемы, допускающие проверяющий тест относительно  $IO_1^{const}$  длины не более  $2\sqrt{n} \cdot (1 + o(1))$ .

Особый интерес представляют константные верхние оценки функций Шеннона длины теста. Первые результаты такого типа предполагали введение дополнительных входов и выходов в схему. Так, в статье [19] для произвольной СФЭ в базисе  $\{x | y, \bar{x}\}$  был предложен метод ее перестраивания в тестопригодную схему в базисе  $\{x | y, x \oplus y, \bar{x}\}$ , допускающую полный проверяющий тест длины 5 относительно константных неисправностей на входах и выходах функциональных элементов, при этом число дополнительных как входов, так и выходов сравнимо с числом элементов схемы. В статье [20] для произвольной СФЭ в базисе  $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  (возможны и элементы  $x | y, x \downarrow y$ ) был предложен метод ее перестраивания в тестопригодную схему в том же базисе, допускающую полный проверяющий тест длины 3 относительно константных неисправностей на входах и выходах функциональных элементов, при этом число дополнительных выходов практически равно числу элементов схемы, а число дополнительных входов равно шести; также в этой статье указывается на неулучшаемость в общем случае верхней оценки 3 длины единичного теста относительно константных неисправностей на входах элементов. В работе [21] предложен базис из четырехвходовых функциональных элементов такой, что любую булеву функцию можно реализовать в этом базисе как подфункцию схемой с двумя дополнительными входами,

допускающей полный проверяющий тест длины 2 при константных неисправностях на выходах элементов (возможны также константные неисправности на всех входах схемы и элементов схемы, не являющихся дополнительными входами). В статье [22] предложен базис из шестивходовых функциональных элементов такой, что любую булеву функцию можно реализовать в этом базисе как подфункцию схемой с четырьмя дополнительными входами, допускающей полный проверяющий тест длины 2 при константных неисправностях на выходах элементов (возможны также константные неисправности на всех входах схемы и элементов схемы, но при этом в каждом элементе число неисправных входов, являющихся дополнительными входами схемы, не должно превосходить 1). В работе [23] предложен метод синтеза таких схем с одним дополнительным входом и четырьмя дополнительными выходами в базисе из специальных двух- и трехвыходных функциональных блоков, которые допускают полный проверяющий тест длины 3 при константных неисправностях на входах и выходах блоков.

С 2000 г. стали появляться константные верхние оценки функций Шеннона длины теста без введения дополнительных входов. Так, в работе [13, теорема 1] доказано равенство  $L_{B_1}^{detect}(O_1^{inv}, n) = 1$ . В статье [24] получен такой результат: в произвольном полном базисе  $B$  имеет место оценка

$$L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) \leq 3.$$

Установлены следующие равенства:  $L_{B_0}^{detect}(O^0, n) = L_{B_0}^{detect}(O^1, n) = 2$  при  $n > 1$  [25],  $L_{B_1}^{detect}(O_1^1, n) = 1$  [26],  $L_{B_1}^{detect}(O^0, n) = 1$  [27]. Отметим, впрочем, что  $L_{\{x|y\}}^{detect}(O^1, n) \geq n + 1$  [28]. Автором настоящей статьи найдены [29, 30] примеры полных конечных базисов  $B'$ ,  $B''$  таких, что

$$2 \leq L_{B'}^{detect}(O^{const}, n) \leq 4, \quad 2 \leq L_{B''}^{detect}(O^{inv}, n) \leq 4,$$

а также доказано [31], что в любом полном конечном базисе  $B$

$$2 \leq L_B^{detect}(O_1^{const}, n) \leq 4.$$

С учетом классических результатов о поведении функций Шеннона длины проверяющего теста при неисправностях на входах схем (схемный базис при этом не имеет значения)

$$L^{detect}(P^{const}, n) = L^{detect}(P_1^{const}, n) = \begin{cases} 2n - 2t - 1, & \text{если } n = 2^t + t + 1, \\ 2n - 2t - 2, & \text{если } 2^t + t + 1 < n \leq 2^{t+1} + t + 1 \end{cases} \quad [32, 33];$$

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq L^{detect}(P^{inv}, n) \leq n \quad [33],$$

из результатов [29–31] вытекают утверждения 1–2.

**Утверждение 1.** Существуют конечные полные базисы  $B'$ ,  $B''$  такие, что

$$2n - 2t - 2 \leq L_{B'}^{detect}(PO^{\text{const}}, n) \leq 2n - 2t + 3$$

(где  $t$  определяется из неравенств  $2^t + t + 1 \leq n \leq 2^{t+1} + t + 1$ ),

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq L_{B''}^{detect}(PO^{inv}, n) \leq n + 4.$$

**Утверждение 2.** В любом конечном полном базисе  $B$  имеют место неравенства

$$2n - 2t - 2 \leq L_B^{detect}(PO_1^{\text{const}}, n) \leq 2n - 2t + 3,$$

где  $t$  определяется из неравенств  $2^t + t + 1 \leq n \leq 2^{t+1} + t + 1$ .

В данной работе доказывается, что функция Шеннона длины единичного диагностического теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в базисе  $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$  равна 1. Основная идея доказательства будет сводиться к тому, что при любой одиночной инверсной неисправности элемента в схеме, реализующей произвольную булеву функцию  $f$ , схема в неисправном состоянии реализует функцию  $\bar{f}$ . Основному результату предположим аналогичное утверждение для менее «естественного», но допускающего более простую конструкцию базиса. Обозначим через  $\Psi_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$  булеву функцию, вектор значений которой имеет вид (01111111111101), а через  $\Psi_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$  – булеву функцию, вектор значений которой имеет вид (0111110000111101). Положим

$$\hat{B}_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1, \Psi_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \Psi_2(y_1, y_2, y_3, y_4)\}.$$

Обозначения для названий схем, подсхем и элементов схем будут сохраняться лишь в пределах одного доказательства теоремы.

**Теорема 1.** При  $n \in N \cup \{0\}$  имеет место равенство  $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  – произвольная булева функция, формально зависящая от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для функций, каждая из которых может быть реализована схемой, состоящей из одного функционального элемента, и не являющихся селекторными, очевидно, что  $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 1$  (для селекторной функции  $f = x_i$  имеет место равенство  $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 0$ ).

Будем теперь считать, что функция  $f$  существенно зависит от всех своих переменных и не реализуется схемами из одного элемента.

Запишем полином Жегалкина функции  $f$  в виде  $P_f = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_t \oplus a_0$ , где  $K_i$  – монотонные конъюнкции различных переменных или переменные ( $i = \overline{1, t}$ ),  $a_0 \in \{0, 1\}$ . Будем, не ограничивая общности, считать,

что слагаемые  $K_1, K_2, \dots, K_q$  ( $0 \leq q \leq t$ ) нелинейные, а слагаемые  $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$  – переменные. Опишем устройство избыточной схемы  $S$ , реализующей  $f$  и допускающей единичный диагностический тест длины 1.

**Случай 1.** Пусть функция  $f$  нелинейная ( $q > 0$ ). Пусть монотонная конъюнкция  $K_i$  имеет вид  $x_{v_1} x_{v_2} \& \dots \& x_{v_r}$  ( $i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $2 \leq r \leq n$ ,  $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_r \leq n$ ). Реализуем  $K_i$  цепочкой конъюнкторов  $Z_i^1$ . При этом на входы первого элемента  $E_{i,1}^1$  цепочки  $Z_i^1$  подаются переменные  $x_{v_1}, x_{v_2}$ , на первый вход  $j$ -го конъюнктора  $E_{i,j}^1$  ( $j \in \{2, \dots, r-1\}$ ) цепочки подается выход предыдущего конъюнктора  $E_{i,j-1}^1$ ; на второй вход конъюнктора  $E_{i,j}^1$  цепочки подается переменная  $x_{v_{j+1}}$ . Для каждой цепочки  $Z_i^1$  построим две ее копии  $Z_i^2, Z_i^3$  (названия элементов этих цепочек отличаются от названий соответствующих элементов цепочки  $Z_i^1$  лишь верхним индексом, повторяющим верхний индекс названия той цепочки, которой принадлежит элемент). Для тройки цепочек  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3$  построим контролируемую цепочку  $Z_i^4$ , устроенную следующим образом. Первый элемент этой цепочки  $E_{i,1}^4$  – это элемент сложения по модулю 2, на оба входа которого подается переменная  $x_1$ . Элемент  $E_{i,j}^4$  ( $j \in \{2, \dots, r-1\}$ ) цепочки  $Z_i^4$  – это элемент, реализующий функцию  $\Psi_1$ ; на первый, второй и третий входы этого элемента подаются выходы элементов  $E_{i,j-1}^1, E_{i,j-1}^2, E_{i,j-1}^3$  соответственно, на четвертый вход подается выход элемента  $E_{i,j-1}^4$ . Элемент  $E_{i,r}^4$  цепочки  $Z_i^4$  – это элемент, реализующий функцию  $\Psi_2$ ; на первый, второй и третий входы этого элемента подаются выходы элементов  $E_{i,r-1}^1, E_{i,r-1}^2, E_{i,r-1}^3$  соответственно, на четвертый вход подается выход элемента  $E_{i,r-1}^4$ . Построив такие четверки цепочек для каждой конъюнкции  $K_i$  ( $i \in \{1, \dots, q\}$ ), завершим синтез схемы  $S$ , добавив еще цепочку  $Z$ , состоящую из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента  $E_1$  цепочки  $Z$  подаются выходы последних элементов цепочек  $Z_1^1, Z_1^4$ ; на первый вход каждого элемента  $E_u$  ( $u \in \{2, \dots, t+q-1+a_0\}$ ) суммы по модулю 2 в цепочке  $Z$  подается выход предыдущего элемента  $E_{u-1}$ ; на вторые входы элементов  $E_2, E_3, \dots, E_{2q-2}, E_{2q-1}$  цепочки  $Z$  подаются выходы последних элементов цепочек  $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$  соответственно; на вторые входы следующих  $(t-q)$  элементов цепочки  $Z$  подаются переменные, равные конъюнкциям  $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$ ; наконец, при  $a_0 = 1$  на второй вход элемента  $E_{t+q}$  подается выход эле-

мента  $E_0$ , реализующего константу 1. Выход элемента  $E_{t+q-1+a_0}$  является выходом схемы. Легко видеть, что при отсутствии неисправностей схема  $S$  реализует функцию  $f$  (так как в силу построения в схеме  $S$  по модулю 2 суммируются слагаемые полинома Жегалкина функции  $f$  по одному разу каждое, а также  $q$  нулей, возникших на выходах последних элементов цепочек  $Z_1^4, Z_2^4, \dots, Z_q^4$  (поскольку при отсутствии неисправностей на три первых входа любого элемента  $E_{i,j}^4$  ( $j > 1$ ) подаются одинаковые значения, а на четвертый вход подается 0, вычисленный на выходе элемента  $E_{i,j-1}^4$ ).

Предположим теперь, что в схеме  $S$  произошла инверсная неисправность на выходе какого-то элемента. Докажем, что реализуемая при этом функция равна  $\bar{f}$ , так что любой набор образует единичный диагностический тест для схемы  $S$ .

Сразу заметим, что одиночная инверсная неисправность элемента  $E_j$  для любого  $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t+q-1+a_0\}$  будет обнаружена при подаче на входы схемы  $S$  любого набора  $\tilde{\alpha}$ , так как на выходе неисправной схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Пусть теперь неисправен какой-то элемент  $E_{i,j}^4$ . При отсутствии неисправности на выходе этого элемента (при подаче набора  $\tilde{\alpha}$  на входы схемы) возникал 0, теперь возникает 1, и эта единица передается в силу определения функций  $\Psi_1, \Psi_2$  вплоть до выхода последнего элемента цепочки  $Z_i^4$ , где попадает на вход какого-то элемента цепочки  $Z$  вместо нуля, который возник бы там при отсутствии неисправностей. А так как значения на выходах всех остальных цепочек  $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$  (кроме  $Z_i^4$ ) совпадают с вычисленными при отсутствии неисправности, то на выходе схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Пусть, наконец, неисправен какой-то конъюнктор  $E_{i,j}^d$  ( $d \in \{1, 2, 3\}$ ). При отсутствии неисправностей в схеме на выходах элементов  $E_{i,j'}^1, E_{i,j'}^2, E_{i,j'}^3$  (при подаче набора  $\tilde{\alpha}$  на входы схемы) были одинаковые значения, и на выходах всех элементов цепи  $Z_i^4$  возникал 0, теперь же ситуация оказывается следующей. На выходах  $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3$  возникают оба значения (0 и 1) начиная с элемента  $E_{i,j+1}^4$  вплоть до предпоследнего элемента цепи  $Z_i^4$  на выходах этих элементов возникают единицы. Единица оказывается на правом входе последнего элемента цепи  $Z_i^4$ . Рассмотрим значения на выходах последних элементов цепей  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3$ . Очевидно, что два из трех этих значений вычислены при отсутствии неисправностей в цепях и совпадают с правильными значениями. Третье значение может либо совпадать с двумя другими, либо отличаться от них. По определению функции  $\Psi_2$  при значении 1

ее четвертого аргумента или при несовпадении всех значений первых трех аргументов значение  $\Psi_2$  будет нулевым, если и только если первый аргумент отличается от второго и третьего (т.е. на выходе последнего элемента цепочки  $Z_i^1$  вычисленное значение неправильное). Теперь ясно, что на выходе схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ , поскольку значения на выходах всех остальных цепочек  $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$  (кроме  $Z_i^1, Z_i^4$ ) совпадают с вычисленными при отсутствии неисправности, а сумма отличий значений на выходах цепочек  $Z_i^1, Z_i^4$  от вычисленных при отсутствии неисправностей равна 1.

Таким образом, в случае любой одиночной инверсной неисправности на выходе элемента функция, реализуемая неисправной схемой, равна  $\bar{f}$ , так что любой набор образует единичный диагностический тест.

**Случай 2.** Пусть функция  $f$  линейная ( $q = 0$ ). Тогда схема  $S$  по сравнению с предыдущим случаем упрощается до цепочки  $Z$ , состоящей из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента  $E_1$  цепочки  $Z$  подаются переменные, равные конъюнкциям  $K_1, K_2$ ; на первый вход каждого элемента  $E_u$  ( $u \in \{2, \dots, t-1+a_0\}$ ) суммы по модулю 2 в цепочке  $Z$  подается выход предыдущего элемента  $E_{u-1}$ ; на вторые входы элементов  $E_2, E_3, \dots, E_{t-1}$  цепочки  $Z$  подаются выходы переменные, равные конъюнкциям  $K_3, K_4, \dots, K_t$ ; наконец, при  $a_0 = 1$  на второй вход элемента  $E_t$  подается выход элемента  $E_0$ , реализующего константу 1. Выход элемента  $E_{t-1+a_0}$  является выходом схемы. Одиночная инверсная неисправность элемента  $E_j$  для любого  $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t-1+a_0\}$  будет обнаружена при подаче на входы схемы  $S$  любого набора  $\tilde{\alpha}$ , так как на выходе неисправной схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Теорема доказана.

Докажем теперь основной результат работы – теорему 2. Теорема 2 усиливает результат теоремы 1 из статьи [13] и улучшает результат теоремы 2 из статьи [13].

**Теорема 2.** При  $n \in N \cup \{0\}$  имеет место равенство  $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  – произвольная булева функция, формально зависящая от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для функций, каждая из которых может быть реализована схемой, состоящей из одного функционального элемента, и не являющихся селекторными, очевидно, что  $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 1$  (для селекторной функции  $f = x_i$  имеет место равенство  $L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 0$ ). Будем теперь считать, что функция  $f$  существенно зависит от всех своих переменных и не реализуется схемами из одного элемента.

Запишем полином Жегалкина функции  $f$  в виде

$$P_f = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_t \oplus a_0,$$

где  $K_i$  – монотонные конъюнкции различных переменных или переменные ( $i = \overline{1, t}$ ),  $a_0 \in \{0, 1\}$ . Будем, не ограничивая общности, считать, что слагаемые  $K_1, K_2, \dots, K_q$  ( $0 \leq q \leq t$ ) нелинейные, а слагаемые  $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$  – переменные. Опишем устройство избыточной схемы  $S$ , реализующей  $f$  и допускающей единичный диагностический тест длины 1.

**Случай 1.** Пусть функция  $f$  – нелинейная ( $q > 0$ ). Пусть монотонная конъюнкция  $K_i$  имеет вид  $x_{v_1} x_{v_2} \& \dots \& x_{v_r}$  ( $i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $2 \leq r \leq n$ ,  $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_r \leq n$ ). Реализуем  $K_i$  цепочкой конъюнкторов  $Z_i^1$ . При этом на входы первого элемента  $E_{i,1}^1$  цепочки  $Z_i^1$  подаются переменные  $x_{v_1}$ ,  $x_{v_2}$ , на первый вход  $j$ -го конъюнктора  $E_{i,j}^1$  ( $j \in \{2, \dots, r-1\}$ ) цепочки подается выход предыдущего конъюнктора  $E_{i,j-1}^1$ ; на второй вход конъюнктора  $E_{i,j}^1$  цепочки подается переменная  $x_{v_{j+1}}$ . Для каждой цепочки  $Z_i^1$  построим две ее копии  $Z_i^2, Z_i^3$  (названия элементов этих цепочек отличаются от названий соответствующих элементов цепочки  $Z_i^1$  лишь верхним индексом, повторяющим верхний индекс названия той цепочки, которой принадлежит элемент). Для тройки цепочек  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3$  построим контролируемую подсхему  $S_i$ , устроенную следующим образом. Выходы каждой пары элементов  $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2$  подаются на входы элемента  $E_{i,j}^4$  сложения по модулю 2 ( $j = \overline{1, r-1}$ ), входящего в подсхему  $S_i$ . Выходы каждой пары элементов  $E_{i,j}^1, E_{i,j}^3$  подаются на входы элемента  $E_{i,j}^5$  сложения по модулю 2 ( $j = \overline{1, r-1}$ ), входящего в подсхему  $S_i$ . Затем в подсхеме  $S_i$  строится цепочка  $Z_i^4$  из подсхем  $S_{i,l}$  ( $l = \overline{1, 2r-3}$ ), устроенных следующим образом. Подсхема  $S_{i,l}$  имеет два входа (обозначим их пока  $y_1, y_2$ ) и один выход и реализует дизъюнкцию своих входов в соответствии с формулой  $A_1 = ((y_1 \& y_2) \oplus y_1) \oplus y_2$ , при этом функциональные элементы подсхемы  $S_{i,l}$  обозначаются так:  $E_{i,l,1}^6$  – конъюнктор в формуле  $A_1$ ,  $E_{i,l,2}^6$  – первый элемент сложения по модулю 2 в формуле  $A_1$ ,  $E_{i,l,3}^6$  – второй элемент сложения по модулю 2 в формуле  $A_1$ . Опишем устройство цепочки  $Z_i^4$ . На входы подсхемы  $S_{i,1}$  подаются выходы элементов  $E_{i,1}^4$  и  $E_{i,1}^5$ . На второй вход каждой подсхемы  $S_{i,l}$  ( $l > 1$ ) подается выход предыдущей подсхемы  $S_{i,l-1}$ . На первые входы подсхем  $S_{i,2}, S_{i,3}, S_{i,4}, S_{i,5}, \dots, S_{i,2r-4}, S_{i,2r-3}$  подаются выходы элементов  $E_{i,2}^4, E_{i,2}^5, E_{i,3}^4, E_{i,3}^5, \dots, E_{i,r-1}^4, E_{i,r-1}^5$  соответственно. Наконец, в подсхеме  $S_i$  имеется еще

подсхема  $S'_i$ , состоящая лишь из конъюнктора  $E_i^8$ , на первый вход которого подается выход элемента  $E_{i,r-1}^4$ , а на второй вход – выход элемента  $E_{i,r-1}^5$ . Построение подсхемы  $S_i$  завершено.

Построив такие тройки цепочек  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3$  и подсхемы  $S_i$  для каждой конъюнкции  $K_i$  ( $i \in \{1, \dots, q\}$ ), завершим синтез схемы  $S$ , добавив еще цепочку  $Z$ , состоящую из  $2q+t-1+a_0$  элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента  $E_1$  цепочки  $Z$  подаются выходы последнего элемента цепочки  $Z_1^1$  и выход элемента  $E_1^8$ ; на первый вход каждого элемента  $E_u$  ( $u \in \{2, \dots, 2q+t-1+a_0\}$ ) суммы по модулю 2 в цепочке  $Z$  подается выход предыдущего элемента  $E_{u-1}$ ; на второй вход элемента  $E_2$  цепочки  $Z$  подается выход выходного элемента  $E_{1,2r-3,3}^6$  последней подсхемы  $S_{1,2r-3}$  цепочки  $Z_1^4$ ; на вторые входы элементов  $E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, \dots, E_{3q-3}, E_{3q-2}, E_{3q-1}$  цепочки  $Z$  подаются выходы выходных элементов  $Z_2^1, S'_2, Z_2^4, Z_3^1, S'_3, Z_3^4, \dots, Z_q^1, S'_q, Z_q^4$  соответственно; на вторые входы следующих  $(t-q)$  элементов цепочки  $Z$  подаются переменные, равные конъюнкциям  $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$ ; наконец, при  $a_0 = 1$  на второй вход элемента  $E_{2q+t}$  подается выход элемента  $E_0$ , реализующего константу 1. Выход элемента  $E_{2q+t-1+a_0}$  является выходом схемы.

Легко видеть, что при отсутствии неисправностей схема  $S$  реализует функцию  $f$  (так как в силу построения в схеме  $S$  по модулю 2 суммируются слагаемые полинома Жегалкина функции  $f$  по одному разу каждое, а также  $2q$  нулей, возникших:

а) на выходах последних элементов цепочек  $Z_1^4, Z_2^4, \dots, Z_q^4$  (поскольку при отсутствии неисправностей в схеме на обоих входах и на выходе любой подсхемы  $S_{i,l}$  оказываются нули);

б) на выходах элементов  $E_1^8, E_2^8, \dots, E_q^8$  (поскольку при отсутствии неисправностей в схеме на обоих входах и на выходе любого элемента  $E_i^8$  оказываются нули).

Предположим теперь, что в схеме  $S$  произошла инверсная неисправность на выходе какого-то элемента. Докажем, что реализуемая при этом функция равна  $\bar{f}$ , так что любой набор образует единичный диагностический тест для схемы  $S$ .

Сразу заметим, что одиночная инверсная неисправность элемента  $E_j$  для любого  $j \in \{\bar{a}_0, \dots, 2q+t-1+a_0\}$  будет обнаружена при подаче на входы схемы  $S$  любого набора  $\tilde{\alpha}$ , так как на выходе неисправной схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Пусть теперь неисправен какой-то элемент  $E_i^8$ . На произвольном входном наборе  $\tilde{\alpha}$  при указанной неисправности значение на выходе схемы изменится на противоположное, ибо выход неисправного элемента не ветвится и от этого выхода к выходу схемы ведет цепочка элементов сложения по модулю 2.

На произвольном входном наборе  $\tilde{\alpha}$  при неисправности элемента  $E_{i,j}^4$  или  $E_{i,j}^5$  ( $1 \leq j \leq r-1$ ) значение на выходе той подсхемы  $S_{i,l}$ , на вход которой подан выход неисправного элемента, а также значения на выходах подсхем  $S_{i,l+1}, \dots, S_{i,2r-3}$  изменятся с нулей на единицы. При неисправности  $E_{i,r-1}^4$  или  $E_{i,r-1}^5$  значение на выходе конъюнктора  $E_i^8$  не изменится (останется равным нулю, поскольку на второй вход этого конъюнктора поступает нуль). Поэтому в целом среди значений, подаваемых на входы цепочки  $Z$ , изменится ровно одно, так что значение на выходе схемы изменится на противоположное.

Пусть неисправен какой-то конъюнктор  $E_{i,j}^d$  ( $d \in \{1, 2, 3\}$ ). При отсутствии неисправностей в схеме на выходах элементов  $E_{i,j'}^1, E_{i,j'}^2, E_{i,j'}^3$  (при подаче набора  $\tilde{\alpha}$  на входы схемы) были одинаковые значения, и на выходах всех элементов  $E_{i,j'}^4, E_{i,j'}^5$ , на выходах всех подсхем  $S_{i,l}$  цепи  $Z_i^4$  и на выходе  $E_i^8$  возникали нули, теперь же ситуация оказывается следующей. На выходах  $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3$  возникают оба значения (0 и 1), на выходе хотя бы одного из элементов  $E_{i,j}^4$  и  $E_{i,j}^5$  возникает единица и начиная с той подсхемы  $S_{i,l}$  с наименьшей глубиной конъюнктора, на вход которой подается выход элемента  $E_{i,j}^4$  или  $E_{i,j}^5$  с неправильным значением, на выходе  $S_{i,l}$  и выходах следующих подсхем  $S_{i,l+1}, \dots, S_{i,2r-3}$  возникают единицы. Рассмотрим значения  $a, b, c$  на выходах последних элементов  $E_{1,r-1}^1, E_{1,r-1}^2, E_{1,r-1}^3$  цепей  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3$  соответственно. Очевидно, что два из трех этих значений вычислены при отсутствии неисправностей в цепях и совпадают с правильными значениями.

Третье значение может либо совпадать с двумя другими, либо отличаться от них. Если все три эти значения одинаковы, то на выходах элементов  $E_{1,r-1}^4$  и  $E_{1,r-1}^5$  – нули, на выходе конъюнктора  $E_i^8$  – тоже нуль, так что с учетом правильности значения на выходе  $E_{1,r-1}^1$  на выходе схемы возникает неправильное значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ . Если значение  $a$  отличается и от  $b$ , и от  $c$ , то на выходе  $E_{1,r-1}^1$  вычислено неправильное значение. Но при этом на выходах  $E_{1,r-1}^4$  и  $E_{1,r-1}^5$  возникают единицы (а не нули), на выходе конъюнктора  $E_i^8$  –

тоже единица (а не ноль), так что с учетом неправильности значений на выходах  $E_{1,r-1}^1$  и  $E_{i,2r-3,3}^6$  на выходе схемы возникает неправильное значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ . Если же, наконец, значение  $a$  совпадает с одним из значений  $b$ ,  $c$  и не совпадает с другим, то на выходах ровно одного из двух элементов  $E_{1,r-1}^4$  и  $E_{1,r-1}^5$  возникает ноль, на выходе конъюнктора  $E_i^8$  – тоже ноль, так что с учетом правильности значения на выходе  $E_{1,r-1}^1$  на выходе схемы возникает неправильное значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Таким образом, в случае любой одиночной инверсной неисправности на выходе элемента функция, реализуемая неисправной схемой, равна  $\bar{f}$ , так что любой набор образует единичный диагностический тест.

**Случай 2.** Пусть функция  $f$  – линейная ( $q=0$ ). Тогда схема  $S$  по сравнению с предыдущим случаем упрощается до цепочки  $Z$ , состоящей из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента  $E_1$  цепочки  $Z$  подаются переменные, равные конъюнкциям  $K_1, K_2$ ; на первый вход каждого элемента  $E_u$  ( $u \in \{2, \dots, t-1+a_0\}$ ) суммы по модулю 2 в цепочке  $Z$  подается выход предыдущего элемента  $E_{u-1}$ ; на вторые входы элементов  $E_2, E_3, \dots, E_{t-1}$  цепочки  $Z$  подаются выходы переменные, равные конъюнкциям  $K_3, K_4, \dots, K_t$ ; наконец, при  $a_0=1$  на второй вход элемента  $E_t$  подается выход элемента  $E_0$ , реализующего константу 1. Выход элемента  $E_{t-1+a_0}$  является выходом схемы. Одиночная инверсная неисправность элемента  $E_j$  для любого  $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t-1+a_0\}$  будет обнаружена при подаче на входы схемы  $S$  любого набора  $\tilde{\alpha}$ , так как на выходе неисправной схемы возникнет значение  $\bar{f}(\tilde{\alpha})$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Отметим, что сложность получаемых в доказательствах теорем 1 и 2 схем есть  $O(n2^n)$  и что глубину этих схем можно сократить до  $n + O(\log_2 n)$ , заменив в каждом случае цепочки  $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3, Z_i^4, Z$  ( $i = \overline{1, q}$ ) элементов или подсхем на двоичные деревья минимально возможной глубины, состоящие из тех же элементов или подсхем.

Поскольку с очевидностью имеет место равенство  $L^{diagn}(P_1^{inv}, n) = n$  (верхняя оценка тривиальна, нижняя достигается на конъюнкции  $n$  переменных), то из доказательства теорем 1, 2 настоящей статьи вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 3.**  $L_{\hat{B}_1}^{detect}(PO_1^{inv}, n) = L_{B_1}^{detect}(PO_1^{inv}, n) = n$ .

*Автор выражает глубокую благодарность профессору С. А. Ложкину, к.ф.-м.н. Е. В. Морозову и Д. А. Неяглову за обсуждение работы и ценные замечания.*

## Список литературы

1. **Яблонский, С. В.** О тестах для электрических схем / С. В. Яблонский, И. А. Чегис // Успехи математических наук. – 1955. – Т. 10, № 4 (66). – С. 182–184.
2. **Чегис, И. А.** Логические способы контроля электрических схем / И. А. Чегис, С. В. Яблонский // Труды МИАН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 270–360.
3. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 192 с.
4. **Fujiwara, H.** Logic testing and design for testability / H. Fujiwara. – Cambridge, Massachusetts ; London : MIT Press, 1990. – 284 p.
5. **Reddy, S. M.** Easily testable realization for logic functions / S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1972. – Vol. 21, Iss. 1. – P. 124–141.
6. **Saluja, K. K.** Fault detecting test sets for Reed–Muller canonic networks / K. K. Saluja, S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1975. – Vol. 24, № 1. – P. 995–998.
7. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 1. – С. 72–74.
8. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов / Н. П. Редькин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 2. – М. : Наука, 1989. – С. 198–222.
9. **Редькин, Н. П.** О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов / Н. П. Редькин // Известия вузов. Математика. – 1988. – № 7. – С. 57–64.
10. **Редькин, Н. П.** О схемах, допускающих короткие тесты / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1988. – № 2. – С. 17–21.
11. **Редькин, Н. П.** О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1992. – № 5. – С. 43–46.
12. **Редькин, Н. П.** О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2007. – № 3. – С. 29–33.
13. **Коваценок, С. В.** Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей / С. В. Коваценок // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2000. – № 2. – С. 45–47.
14. **Коляда, С. С.** О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов / С. С. Коляда // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2011. – № 6. – С. 47–49.
15. **Коляда, С. С.** Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов / С. С. Коляда // Дискретный анализ и исследование операций. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 58–74.
16. **Коляда, С. С.** Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов / С. С. Коляда // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2013. – № 4. – С. 32–34.
17. **Носков, В. Н.** Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем / В. Н. Носков // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 4. – С. 3–23.
18. **Hirayama, T.** Easily testable realization based on OR-AND-EXOR expansion with single-rail inputs / T. Hirayama, G. Koda, Y. Nishitani, K. Shimizu // IEICE Trans. Inf. & Syst. – 1999. – Vol. E-82D, № 9. – P. 1278–1286.

19. **Hayes, J. P.** On modifying logic networks to improve their diagnosability / J. P. Hayes // IEEE Trans. Comput. – 1974. – Vol. C-23, № 1. – P. 56–62.
20. **Saluja, K. K.** On minimally testable logic networks / K. K. Saluja, S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1974. – Vol. C-23, № 1. – P. 552–554.
21. **Inose, H.** Synthesis of automatic fault diagnosable logical circuits by function conversion method / H. Inose, M. Sakauchi // Proc. First USA-Japan Computer Conf. – 1972. – P. 426–430.
22. **DasGupta, S.** Rudolph. Dual-mode logic for function-independent fault testing / S. DasGupta, C. R. P. Hartmann, L. D. Rudolph // IEEE Trans. Comput. – 1980. – Vol. C-29, № 11. – P. 1025–1029.
23. **Горяшко, А. П.** О синтезе схем с минимальной трудоемкостью тестирования / А. П. Горяшко // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 1. – С. 145–153.
24. **Редькин, Н. П.** Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов / Н. П. Редькин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 12. – М. : Физматлит, 2003. – С. 217–230.
25. **Бородина, Ю. В.** О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов / Ю. В. Бородина // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2008. – № 1. – С. 40–44.
26. **Бородина, Ю. В.** О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов / Ю. В. Бородина // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2008. – № 5. – С. 49–52.
27. **Бородина, Ю. В.** Синтез легкотестируемых схем в базе Жегалкина при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов / Ю. В. Бородина, П. А. Бородин // Дискретная математика. – 2010. – Т. 22, № 3. – С. 127–133.
28. **Бородина Ю. В.** Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базе  $\{x|y\}$  / Ю. В. Бородина // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII Междунар. конф. (Казань, 16–20 июня 2014 г.). – Казань : Отечество, 2014. – С. 38–39.
29. **Романов, Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов / Д. С. Романов // Дискретная математика. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 104–120.
30. **Романов, Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов / Д. С. Романов // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2015. – № 1. – С. 30–37.
31. **Романов, Д. С.** Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины / Д. С. Романов // Дискретная математика. – 2014. – Т. 26, № 2. – С. 100–130.
32. **Носков, В. Н.** О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем / В. Н. Носков // Дискретный анализ. – 1975. – № 27. – С. 23–51.
33. **Погосян, Г. Р.** О проверяющих тестах для логических схем / Г. Р. Погосян. – М. : ВЦ АН СССР, 1982. – 57 с.

### *References*

1. Yablonskiy S. V., Chegis I. A. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1955, vol. 10, no. 4 (66), pp. 182–184.
2. Chegis I. A., Yablonskiy S. V. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of MIAS USSR]. 1958, vol. 51, pp. 270–360.

3. Red'kin N. P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and diagnostics of circuits]. Moscow: Izd-vo MGU, 1992, 192 p.
4. Fujiwara H. *Logic testing and design for testability*. Cambridge, Massachusetts; London: MIT Press, 1990, 284 p.
5. Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1972, vol. 21, iss. 1, pp. 124–141.
6. Saluja K. K., Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1975, vol. 24, no. 1, pp. 995–998.
7. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1986, no. 1, pp. 72–74.
8. Red'kin N. P. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 2. Moscow: Nauka, 1989, pp. 198–222.
9. Red'kin N. P. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1988, no. 7, pp. 57–64.
10. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1988, no. 2, pp. 17–21.
11. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1992, no. 5, pp. 43–46.
12. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2007, no. 3, pp. 29–33.
13. Kovatsenko S. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2000, no. 2, pp. 45–47.
14. Kolyada S. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2011, no. 6, pp. 47–49.
15. Kolyada S. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2013, vol. 20, no. 2, pp. 58–74.
16. Kolyada S. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2013, no. 4, pp. 32–34.
17. Noskov V. N. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 4, pp. 3–23.
18. Hirayama T., Koda G., Nishitani Y., Shimizu K. *IEICE Trans. Inf. & Syst.* 1999, vol. E-82D, no. 9, pp. 1278–1286.
19. Hayes J. P. *IEEE Trans. Comput.* 1974, vol. C-23, no. 1, pp. 56–62.
20. Saluja K. K., Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1974, vol. C-23, no. 1, pp. 552–554.
21. Inose H., Sakauchi M. *Proc. First USA-Japan Computer Conf.* 1972, pp. 426–430.
22. DasGupta S. *IEEE Trans. Comput.* 1980, vol. C-29, no. 11, pp. 1025–1029.
23. Goryashko A. P. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and remote control]. 1981, no. 1, pp. 145–153.
24. Red'kin N. P. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 12. Moscow: Fizmatlit, 2003, pp. 217–230.
25. Borodina Yu. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2008, no. 1, pp. 40–44.
26. Borodina Yu. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2008, no. 5, pp. 49–52.

27. Borodina Yu. V., Borodin P. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2010, vol. 22, no. 3, pp. 127–133.
28. Borodina Yu. V. *Problemy teoreticheskoy kibernetiki. Materialy XVII Mezhdunar. konf. (Kazan', 16–20 iyunya 2014 g.)* [Problems of theoretical cybernetics. Proceedings of XVII International conference (Kazan, 16–20 June 2014)]. Kazan: Otechestvo, 2014, pp. 38–39.
29. Romanov D. S. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2013, vol. 25, no. 2, pp. 104–120.
30. Romanov D. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Calculus mathematics and cybernetics]. 2015, no. 1, pp. 30–37.
31. Romanov D. S. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2014, vol. 26, no. 2, pp. 100–130.
32. Noskov V. N. *Diskretnyy analiz* [Discrete analysis]. 1975, no. 27, pp. 23–51.
33. Pogosyan G. R. *O proverayayushchikh testakh dlya logicheskikh skhem* [On fault detection testing of logic circuits]. Moscow: VTs AN SSSR, 1982, 57 p.

---

**Романов Дмитрий Сергеевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математической  
кибернетики, Московский  
государственный университет  
имени М. В. Ломоносова (Россия,  
г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: romanov@cs.msu.ru

**Romanov Dmitriy Sergeevich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematical  
cybernetics, Lomonosov Moscow State  
University (1 Leninskie gory street, Mos-  
cow, Russia)

---

УДК 519.718

**Романов, Д. С.**

**Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один / Д. С. Романов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 38–54.**

## ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМУЛ ПО СЛОЖНОСТИ И ЗАДЕРЖКЕ НА НАБОРАХ В МОДЕЛИ С ЗАДЕРЖКАМИ СОЕДИНЕНИЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Проблема синтеза дискретных управляющих систем является одной из основных проблем математической кибернетики. В общем виде она состоит в построении для заданной дискретной функции ее оптимальной (в том или ином смысле) структурной реализации в рассматриваемом классе управляющих систем. Теоретические результаты, полученные при решении указанной проблемы, находят применение в различных прикладных областях, к числу которых относятся задачи проектирования современных интегральных схем. Традиционная задача синтеза в рассматриваемой в работе постановке относится к изучению функции Шеннона для задержки, т.е. задержки самой «плохой» функции алгебры логики, зависящей от заданных  $n$  переменных. К рассматриваемой задаче относится ряд классических результатов теории дискретных управляющих систем, связанных, в частности, с нахождением схем асимптотически оптимальных одновременно по нескольким параметрам. Целью данной работы является перенесение известных результатов в области синтеза схем, связанных с одновременной оптимизацией схем по сложности и задержке на уровне асимптотических оценок, на новые модели задержки, отражающие емкостную специфику взаимосвязей элементов в интегральных схемах, а также различия временных характеристик элементов на различных наборах входных сигналов. Так, в работе изучается модель задержки в произвольном конечном полном базисе, в которой задержка базисного элемента – положительная действительная величина – по любому из его входов зависит от сигналов, подаваемых на остальные входы этого функционального элемента, и складывается из двух компонентов: задержки межэлементного соединения входа с выходом предыдущего элемента и, собственно, внутренней задержки рассматриваемого элемента. При этом задержки элемента по разным входам, вообще говоря, считаются независимыми величинами.

*Материалы и методы.* Используемые инструменты включают в себя технику универсальных множеств функций и технику моделирования булевых функций переменными на компонентах специальных разбиений булева куба. Метод синтеза схем формульного типа асимптотически оптимальных одновременно как по задержке, так и по сложности применяется к синтезу схем в рассматриваемой модели задержки.

*Результаты.* Получена линейная относительно величины  $n$  асимптотика функции Шеннона для задержки функций алгебры логики от заданных  $n$  переменных. Оказалось, что привлечение дополнительной зависимости задержки от функциональной составляющей элементов базиса не приводит к изменению поведения функции Шеннона на уровне асимптотики. Построены схемы формульного типа, асимптотически оптимальные как по сложности, так и по задержке.

*Выводы.* Установленные результаты позволяют сделать вывод о возможности перенесения классических результатов, связанных с одновременной оптимизацией схем формульного типа по сложности и по задержке, на новую модель задержки.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-07474-а.

**Ключевые слова:** сложность, задержка, глубина, схемы из функциональных элементов, мультиплексорная функция.

B. R. Danilov

## ON SIMULTANEOUS OPTIMIZATION OF FORMULAS BY COMPLEXITY AND DELAY IN A MODEL WITH INTERGATE AND GATE'S INPUTS DELAYS

### **Abstract.**

*Background.* The problem of synthesis of discrete control systems is one of the main problems of mathematical cybernetics. In general, it consists in construction of the optimal (in a varying sense) structural implementation of the given discrete function in the given class of control systems. The theoretical results, obtained while solving the mentioned problem, find their applications in different applied areas, among which are the problems of integral circuits design. The traditional synthesis problem, according to its formulation in this particular work, concerns the study of the Shannon function for delay, i.e. the delay of the "worst" Boolean function that depends on the given set of  $n$  variables. The problem under investigation also includes a number of classic results in the theory of discrete control systems, concerning construction of circuits that are asymptotically optimal according to several parameters simultaneously. The goal of the work is to transfer the known results in the area of circuit synthesis, associated with simultaneous optimization of circuits by several parameters, over to circuit models that reflect capacitive peculiarity of gate interconnections with greater accuracy and also reflect timing parameters of gates under different input signals. The work considers a delay model over an arbitrary finite complete basis, where the gate delay (a positive real quantity) over any of its inputs depend on signals passed on its other inputs and is composed of two components: the gates interconnection delay of the input with the output of the previous gate, and the inner delay of the gate. Meanwhile, delays of a gate over its different inputs are, generally speaking, considered to be independent values.

*Materials and methods.* The instruments used in the research included a technique of universal sets of Boolean functions and a technique of Boolean functions modelling on components of Boolean cube special partitions. The synthesis method of formula type circuits that are asymptotically optimal both by complexity and by delay was implemented for circuit synthesis in the described delay model.

*Results.* The author obtained Shannon function asymptotics, linear in regard to  $n$ , for the delay of Boolean functions that depend on the given  $n$  variables. It turns out that incorporation of an additional delay component, such as its input signals dependence, doesn't lead to a change of Shannon function asymptotical behavior. Formula type circuits, asymptotically optimal both by complexity and by delay, were constructed.

*Conclusions.* The established results allow to educe the applicability of the earlier known results, concerning simultaneous formula type circuits optimization by several parameters to a wider class of delay models.

**Key words:** complexity, delay, depth, function element circuits, multiplexor function.

### **Введение**

Рассматривается задача реализации функций алгебры логики (ФАЛ) асимптотически оптимальными одновременно по двум параметрам формула-

ми над произвольным конечным полным базисом. В качестве оптимизируемых функционалов сложности формул изучаются обобщенная сложность (в ее традиционном понимании) и один из вариантов обобщения глубины (так называемая задержка на наборах [1], которая базируется на понятии задержки [2]). Таким образом, для функционала задержки рассматриваемого типа устанавливается возможность получения результатов, аналогичных классическим результатам О. Б. Лупанова [3], которые относятся к одновременной оптимизации функционалов обобщенной сложности и глубины схем из функциональных элементов (далее СФЭ или просто схем) в их традиционном понимании. С использованием методов С. А. Ложкина [4, 5] аналогичные результаты получаются и для формул. Мы также используем эту технику в наших построениях.

Пусть конечный полный базис  $B$  состоит из функциональных элементов (ФЭ) различных типов  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b$ . Элемент типа  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq b$ , имеет  $k_i$ ,  $k_i \geq 1$ , входов и реализует ФАЛ  $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$ , которая в случае  $k_i \geq 2$  существенно зависит от всех своих булевых переменных, заданных на множестве  $B = \{0, 1\}$ .

Сформулируем наши основные определения для схем, считая формулы (так называемые схемы формульного типа) их частным случаем. Определение СФЭ и формулы над базисом  $B$  традиционны<sup>1</sup>. Будем также пользоваться понятием блок-схемы – СФЭ, входы которой помечены произвольными ФАЛ, естественным образом учитывающиеся при определении вектор-функции, реализуемой данной блок-схемой. Переменные, от которых зависят ФАЛ-пометки входов блок-схемы, считаются ее входными переменными. Схемы из функциональных элементов будем считать частным случаем блок-схем. При определении блок-подсхемы будем следить за тем, чтобы пометки ее входов были согласованы с ФАЛ, реализуемыми на соответствующих вершинах объемлющей схемы (блок-схемы).

Ниже нам понадобится понятие схем специального вида: назовем схему *инициальной цепью* (далее просто цепь), если она представляет собой последовательность функциональных элементов  $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_\delta}$ , в которой:

- 1) у каждого элемента выделен ровно один вход;
- 2) выход каждого элемента, кроме последнего, поступает на выделенный вход следующего элемента и только на него.

Выделенным входом цепи будем называть ее входную дугу, соответствующую выделенному входу ее *первого* элемента  $\varepsilon_{i_1}$ , а число  $\delta$  назовем *структурной глубиной* цепи.

Будем считать, что для каждого функционального элемента  $\varepsilon_i$  задана положительная действительная величина  $L_i$ , которую будем называть *весом* этого элемента. Сумма весов всех функциональных элементов схемы  $\Sigma$  образует величину  $L(\Sigma)$ , которую назовем *сложностью* схемы  $\Sigma$  по аналогии с ее *структурной сложностью*  $\ell(\Sigma)$ , равной количеству элементов схемы  $\Sigma$ .

<sup>1</sup> Понятия, которые в данной работе не определяются, см., например, в [6, 7].

Как отмечалось выше, задержка на наборах типа [1] базируется на понятии задержки из работы [2]. Для разграничения этих понятий задержку [2] далее будем называть глубиной<sup>1</sup>. Будем считать, что для каждой тройки целых чисел  $i, j, s$  ( $1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq s \leq b$ ) и каждого булевого набора  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i})$  задана действительная положительная величина  $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}$  – задержка переключения ФЭ  $\varepsilon_i$  по входу с номером  $j$  на наборе  $\tilde{\alpha}$  значений его входных переменных, когда к указанному входу подключен ФЭ  $\varepsilon_s$ . Рассматриваемую величину будем считать равной нулю, когда ФАЛ  $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{k_i})$  совпадает с константой (переключения не происходит), а в противном случае полагать ее независимой от значения сигнала  $\alpha_j$ , пропускаемого по входу с номером  $j$ :  $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})} = T_{ijs}^{(\tilde{\alpha}')}$ , когда наборы  $\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}'' \in B^{k_i}$  отличаются только в  $j$ -й компоненте. Величину  $D_{ijs}$ , равную наименьшей из задержек  $T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}$ , взятых по всевозможным двоичным наборам  $\tilde{\alpha}$  рассматриваемого вида, назовем *глубиной* ФЭ типа  $\varepsilon_i$  по входу с номером  $j$  с подключенным по этому входу ФЭ типа  $\varepsilon_s$ .

Набор глубин элементов можно рассматривать сам по себе в качестве самостоятельной модели [2], однако теперь, когда глубины элементов подчинены указанному выше условию, будем говорить, что функционалы глубины и задержки базиса *согласованы*. Нам удобно рассматривать согласованную с задержкой глубину, потому что именно она определяет главную константу в асимптотическом поведении функций, рассматриваемых ниже. В терминологии работы [1] задержка определяет «основную» модель, а согласованная с ней глубина – модель «дополнительную».

Для придания смысла задержкам и глубинам элементов по входам, являющимся входами схемы, аналогично [2] будем соотносить с входами рассматриваемых нами СФЭ выходы каких-либо ФЭ базиса  $B$  и определять недостающие задержки и глубины аналогично тому, как они определялись для двух последовательно соединенных ФЭ. Указанные дополнительные пометки входов СФЭ типами ФЭ базиса учитываются при изоморфизме (равенстве) рассматриваемых СФЭ.

*Глубина* (обобщенная)  $D(\omega)$  цепи  $\omega$  – это сумма глубин ее ФЭ по выделенным входам. Пусть цепь  $\omega$  является блок-схемой. Назовем цепь  $\omega$  *существенной* на наборе  $\tilde{\alpha}$  ее входных переменных, если при замене пометки выделенной дуги цепи  $\omega$  на новую для этой цепи переменную полученная цепь существенно зависит от этой новой переменной. *Задержкой на наборе  $\tilde{\alpha}$  существенной* на этом наборе цепи  $\omega$  назовем величину, равную сумме задержек, составляющих цепь  $\omega$  ФЭ по выделенным входам в предположении, что на входы этих элементов поступают значения, реализуемые  $\omega$  на наборе  $\tilde{\alpha}$ . Если цепь не является существенной на  $\tilde{\alpha}$ , то

<sup>1</sup> В качестве базового понятия глубины для задержки на наборах можно было бы взять модель глубины [8], в которой глубина межэлементного соединения определяется над схемой ограниченного размера. Принципиальных изменений это бы не повлекло.

ее задержку на наборе  $\tilde{\omega}$  будем считать равной нулю. Просто *задержкой*  $T(\omega)$  цепи  $\omega$  назовем наибольшую из задержек этой цепи, взятых по всевозможным наборам ее входных переменных. Аналогично, инициальная цепь просто *существенна*, если она существенна на каком-либо наборе указанного вида. Подсхему без ФЭ, состоящую из единственной вершины, являющейся одновременно ее входом и выходом, следует считать тривиальной цепью нулевой задержки и глубины.

Понятия задержки и глубины распространяются на схемы общего вида с помощью так называемых главных цепей. Инициальную цепь СФЭ  $\Sigma$ , выделенный вход которой является входом  $\Sigma$ , а выход – выходом  $\Sigma$ , назовем *главной* цепью схемы  $\Sigma$ . Глубина  $D(\Sigma)$  и задержка  $T(\Sigma)$  СФЭ  $\Sigma$  равна наибольшей глубине и соответственно задержке главных цепей схемы  $\Sigma$ , в случае задержки рассматриваемых как ее блок-подсхемы. Аналогично, структурной глубиной  $\delta(\Sigma)$  СФЭ  $\Sigma$  назовем наибольшую структурную глубину ее главных цепей.

Следует заметить, что произвольная СФЭ с одним выходом может быть преобразована к эквивалентной формуле путем применения операций<sup>1</sup> удаления висячих вершины и поднятия ветвления выхода ФЭ ко входам схемы, а также что указанное преобразование происходит без изменения глубины и задержки исходной схемы.

Определенная нами задержка СФЭ является попыткой на модельном уровне описать зависимость скорости зарядки или разрядки емкости связанного с выходом ФЭ проводника от набора значений, поступающих на входы элемента в момент переключения. Негативным свойством определенной таким образом задержки СФЭ является то, что без дополнительных ограничений любая ФАЛ реализуема «вырожденной» схемой с нулевой задержкой. Причиной такого положения вещей в «вырожденных» схемах являются множества цепей, несущественных каждая по отдельности, но реализующих в совокупности существенные ФАЛ. Детальное изучение этого эффекта в данной работе не проводится, однако в классе формул оказывается достаточным ограничиться лишь схемами, которые не содержат несущественных цепей. В самом деле, схемы формульного типа с несущественными цепями могут рассматриваться с содержательной точки зрения как избыточные: выделенные входы несущественных цепей можно заземлить (подать на них константу ноль) или закортить (подать константу единица), не изменив при этом реализуемую схемой ФАЛ. С модельной точки зрения это означает, что наряду с ФЭ  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b$  нам доступны все (существенные) ФЭ, которые получаются из них путем всевозможных подстановок<sup>2</sup> констант на входы этих элементов и которые вместе с элементами исходного базиса образуют *расширенный* базис  $\tilde{B}$ . При этом, если элемент  $\varepsilon_i$  порождает описанным способом элемент  $\varepsilon'_i$ , то сложностные характеристики последнего индуцируются элементом  $\varepsilon_i$ : его сложность  $L'_i$  совпадает с  $L_i$ , а задержка по входам на наборе входных переменных  $\varepsilon'_i$  совпадает

<sup>1</sup> Подробнее про удаление висячих вершин и поднятие ветвлений см. [6, с. 93, 148–149].

<sup>2</sup> Так называемое «забывание» входов константами.

с задержкой по соответствующим входам элемента  $\varepsilon_i$  на наборе, дополненном по «забываемым» входам соответствующими константами. Таким образом, постановка задачи синтеза оптимальных по задержке схем приобретает смысл среди класса формул  $U_B^\Phi$  над базисом  $\tilde{B}$ , не содержащих несущественных цепей, а также класса схем  $U_B^C$ , получаемых из таких формул путем отождествления изоморфных подсхем. Именно в такой форме необходимо трактовать постановку задачи о задержке из работы [1], а также полученные в этой работе результаты. Заметим, что все построенные в [1] схемы, на которых достигаются верхние оценки, принадлежат классам  $U_B^C$ ,  $U_B^\Phi$ , а вносимая поправка необходима лишь для исключения «вырожденности» функционалов глубины и задержки.

Глубина  $D_B(f)$  ФАЛ  $f$ , ее задержка  $T_B(f)$  и сложность  $L_B^\Phi(f)$  при реализации в классе  $U_B^\Phi$ , а также функции Шеннона  $D_B(n)$ ,  $T_B(n)$ ,  $L_B^\Phi(n)$  для соответственно глубины, задержки, сложности ФАЛ, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , при их реализации в классе  $U_B^\Phi$  определяются обыкновенно:

$$D_B(f) = \min_{\Sigma} D(\Sigma), T_B(f) = \min_{\Sigma} T(\Sigma), L_B^\Phi(f) = \min_{\Sigma} L(\Sigma),$$

$$D_B(n) = \max_{f \in P_2(n)} D_B(f), T_B(n) = \max_{f \in P_2(n)} T_B(f), L_B^\Phi(n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^\Phi(f),$$

где минимумы берутся по множеству тех СФЭ  $\Sigma$  из  $U_B^C$ , которые реализуют ФАЛ  $f$ , а через  $P_2(n)$  обозначено множество всех ФАЛ, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

В работе [2] была установлена следующая асимптотическая оценка<sup>1</sup>:  $D_B(n) \sim \tau_B n$ , где константа  $\tau_B$  – приведенная глубина базиса  $B$  – задается набором глубин его элементов. В настоящей работе показано, что также  $T_B(n) \sim \tau_B$  с той же самой константой  $\tau_B$  при условии, что глубина и задержка базиса  $B$  согласованы. В случае задержки константа  $\tau_B$  называется приведенной задержкой базиса  $B$ . Таким образом, приведенная глубина и задержка базиса с согласованными параметрами глубины и задержки совпадают. Более того, устанавливается, что формула, на которой достигаются асимптотически оптимальная задержка и глубина, может быть выбрана также асимптотически оптимальной по сложности, а именно верна следующая основная теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $B$  – конечный полный базис произвольного вида с согласованными параметрами глубины и задержки. Тогда для любого

<sup>1</sup> Асимптотическое равенство  $h(n) \sim g(n)$  понимается нами как равенство вида  $h(n) = g(n) \pm o(g(n))$ , которое означает, что  $|h(n) - g(n)| = o(g(n))$ . Функции  $g$  и  $h$  положительны при достаточно больших значениях аргумента. Аналогичным образом надо понимать соотношение  $h(n) = g(n) \pm O(g(n))$  и другие подобные им.

натурального  $n$  и любой ФАЛ  $f \in P_2(n)$  существует формула  $\mathcal{F}_n \in U_B^\Phi$ , для которой выполняются асимптотические соотношения вида

$$D(\mathcal{F}_n) \sim \tau_B n, \quad T(\mathcal{F}_n) \sim \tau_B n, \quad L(\mathcal{F}_n) \sim \rho_B (n / \log_2 n), \quad (1)$$

в которых  $\tau_B, \rho_B$  – положительные константы, задаваемые наборами глубин и весов элементов базиса  $B$  соответственно.

Константа  $\rho_B$  называется приведенным весом базиса  $B$  и согласно [3] определяется из соотношений

$$\rho_B = \min_{\substack{1 \leq j \leq b \\ k_j \neq 1}} \rho_j, \quad \rho_j = L_j / (k_j - 1). \quad (2)$$

### 1. Приведенная глубина базиса.

#### Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Далее мы рассматриваем исключительно формулы. Назовем формулу  $\mathcal{F}$  *абсолютной (бесповторной)*, если каждая ее переменная (соответственно каждая ее существенная переменная) входит в  $\mathcal{F}$  ровно один раз. Определим *ранг*  $R(\mathcal{F})$  формулы  $\mathcal{F}$  как число символов переменных в ее записи. С базисом  $B$  связана так называемая ранговая функция  $R_B(t)$  действительного аргумента  $t, t \geq 0$ , значение которой равно наибольшему рангу формул, имеющих задержку, не превосходящую  $t$ . Определим связанные с базисом  $B$  основные константы:

$$k_{\min} = \min_{1 \leq i \leq b, k_i \neq 1} k_i, \quad k_{\max} = \max_{1 \leq i \leq b} k_i,$$

$$D_{\min} = \min_{\substack{1 \leq i \leq b, 1 \leq s \leq b \\ 1 \leq j \leq k_i}} D_{ijs}, \quad T_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq b, 1 \leq s \leq b, \\ 1 \leq j \leq k_i, \tilde{\alpha} \in B^{k_i}}} T_{ijs}^{(\tilde{\alpha})}.$$

Приведенная глубина  $\tau_B$  базиса  $B$  согласно [2] определяется соотношением

$$\tau_B = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\log_2 R_B(t)}. \quad (3)$$

Заметим, что расширение базиса  $B$  до базиса  $\tilde{B}$  не приводит к изменению главных констант, определяющих асимптотические соотношения (1):  $\tau_{\tilde{B}} = \tau_B, \rho_{\tilde{B}} = \rho_B$ . Для константы  $\rho_B$  это очевидно из определения (2), а для константы  $\tau_B$  вытекает из того, что  $R_{\tilde{B}}(t + T_{\max}) \leq R_B(t)$ , так как, «восстановив» ФЭ исходного базиса  $B$ , любую формулу над  $\tilde{B}$  можно заменить формулой над  $B$ , при этом не уменьшив ранг формулы и не увеличив ее задержку более чем на  $T_{\max}$ . Следовательно,  $\tau_B \leq \tau_{\tilde{B}}$ . С другой стороны, непосредственно из определения (3) следует, что при расширении базиса константа  $\tau_B$  не увеличивается.

Рассматриваемая далее лемма 2 является более сильным аналогом леммы 3 из работы [2] и позволяет установить существование формул наперед

заданного ранга с «хорошей» глубиной. Ее доказательство аналогично доказательству указанной выше леммы.

**Лемма 1.** Для любого натурального числа  $m$  в (конечном, полном) базисе  $B$  найдется формула  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$ , для которой выполняются соотношения

$$m \leq R(\mathcal{F}) \leq m^{1+o(1)},$$

$$D(\mathcal{F}) = \tau_B \log_2 m \pm o(\log m).$$

Нижние оценки функции Шеннона получаются обыкновенным образом на основе мощностных соображений. Доказательство следующих двух лемм также традиционно.

**Лемма 2.** Для любых неотрицательного действительного  $t$  и натурального  $n$  число попарно неэквивалентных формул из  $U_B^\Phi$ , которые зависят от переменных  $x_1, \dots, x_n$  и глубина (задержка, сложность) которых не больше  $t$ , не превосходит<sup>1</sup>  $(c_1 n)^{R_A(t)}$  (соответственно  $(c_2 n)^{R_B(t+c_3)}$ ,  $(c_5 n)^{\frac{1}{\rho_B} t + 1}$ ).

**Лемма 3.** Для любого (конечного, полного) базиса  $B$  выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$D_B(n) \geq \tau_B n(1-o(1)), \quad T_B(n) \geq \tau_B n(1-o(1)), \quad L_B^\Phi(n) \geq \rho_B (2^n / \log_2 n)(1-o(1)).$$

## 2. Реализация мультиплексорных ФАЛ на основе обобщенного разложения

При доказательстве верхних асимптотических оценок будем опираться на методы, разработанные в [9]. Приведем определения основных понятий и сформулируем без доказательства утверждения лемм 4, 5, доказательства которых повторяют доказательство аналогичных утверждений [9].

Будем называть *стандартным* базис  $B_0$ , который состоит из трех функциональных элементов  $\varepsilon_\&, \varepsilon_\vee, \varepsilon_\neg$ , реализующих соответственно ФАЛ  $x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1$ . Число, двоичной записью которого является набор  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , будем записывать через  $v(\alpha)$ . Назовем *альтернированием*  $\text{alt}(f)$  ФАЛ  $f$  минимальное число отрезков постоянства, уменьшенное на единицу, на которые распадается набор, составленный из значений ФАЛ  $f$ , взятых на наборах значений ее аргументов, расположенных в порядке следования задаваемых ими с помощью  $v$ -нумерации чисел.

Пусть  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$  – разбиение булевого куба  $B^n$  от булевых переменных группы  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  на попарно непересекающиеся непустые подмножества  $\delta_1, \dots, \delta_d$  (компоненты разбиения), объединение которых

<sup>1</sup> Буквой  $c$  с целочисленными индексами обозначаются абсолютные константы, однозначно задаваемые базисом  $B$ .

равно  $B^n$ . Определим мультиплексорную ФАЛ  $\mu_\Delta$ , соответствующую разбиению  $\Delta$ , равенством

$$\mu_\Delta(\tilde{x}, u_1, \dots, u_d) = \bigvee_{j=1}^d \chi_j(\tilde{x})u_j,$$

в котором  $\chi_j$  – характеристическая ФАЛ компоненты  $\delta_j$ . Заметим, что стандартную мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ,

$$\mu_n(\tilde{x}, u_1, \dots, u_{2^n}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot u_{v(\sigma)+1},$$

можно рассматривать как мультиплексорную ФАЛ  $\mu_\Delta$ , связанную с тривиальным разбиением  $\Delta$ , т.е. таким разбиением, что  $\delta_{v(\sigma)+1} = \{\sigma\}$  для каждого  $\sigma \in B^n$ .

**Лемма 4** (см. [9], лемма 2). Для целого  $n \geq 2$  и отличной от константы ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(n)$ , найдется реализующая  $g$  формула  $\mathcal{F}$  над стандартным базисом  $B_0$ , для которой справедливы неравенства:

$$\delta(\mathcal{F}) \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil + \lfloor \log_2(\text{alt}(g)) \rfloor + 1, \tag{4}$$

$$\ell(\mathcal{F}) \leq \frac{3}{2} \cdot n \lceil \log_2 n \rceil \text{alt}(g). \tag{5}$$

**Лемма 5** (см. [9], следствия из лемм 6, 7). Пусть  $\Delta$  – разбиение куба  $B^n$  переменных  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  на  $d$ ,  $d \leq p$ , компонент, а ФАЛ  $\Phi(y_1, \dots, y_p)$  реализуется абсолютной формулой  $\mathcal{F}$  над базисом  $B$ . Тогда в базисе  $B$  найдется неповторная формула  $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$ ,  $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_d)$ ,  $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_{p+d})$ , такая, что для некоторых ФАЛ  $g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x})$  блок-формула  $\Phi' = \Phi(\tilde{u}, g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x}))$  реализует ФАЛ  $\mu_\Delta(\tilde{x}, \tilde{u})$  и выполняются соотношения<sup>1</sup>:

$$\ell(\Phi) \leq \ell(\mathcal{F}) + c_4 d, \tag{6}$$

$$D(\mathcal{F}) \leq D(\Phi) \leq D(\mathcal{F}) + c_7, \tag{7}$$

$$D(\mathcal{F}) \leq T_{\tilde{u}}(\Phi') \leq D(\mathcal{F}) + c_8, \tag{8}$$

$$D(\mathcal{F}) \leq T_{\tilde{x}}(\Phi') \leq c_9 D(\mathcal{F}) + c_8. \tag{9}$$

Если, кроме того,  $\Delta$  – разбиение куба  $B^n$  на последовательные отрезки, а в записи формулы  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(y_1, \dots, y_p)$  переменная  $y_l$  появляется

---

<sup>1</sup> Через  $T_{\tilde{x}}(\Phi')$  обозначена задержка блок-формулы  $\Phi'$  по тем ее главным цепям, которые начинаются на входах, помеченных ФАЛ зависящими существенно или несущественно от какой-либо переменной группы  $\tilde{x}$ .

левее переменной  $y_r$ , тогда и только тогда, когда  $l < r$ , то альтернирование каждой из ФАЛ  $g'_1(\tilde{x}), \dots, g'_{p+d}(\tilde{x})$  не превосходит  $k_{\max} \cdot \delta(\mathcal{F})$ .

**Лемма 6.** Для натуральных чисел  $n, p$ , связанных неравенством  $p \leq n$ , и некоторого числа  $d = d(n, p)$  найдется неповторная формула  $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$  над базисом  $B$ , существенно зависящая от переменных групп  $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{2n})$ ,  $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_d)$ , и найдутся ФАЛ  $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  такие, что блок-формула  $\Phi(\tilde{u}, g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x}))$  реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{u})$ . При этом сложность формулы  $\Phi$ , ее глубина, задержка блок-формулы  $\Phi'$ , натуральное число  $d$  удовлетворяют для некоторых бесконечно малых функций  $\alpha, \gamma$  соотношениям:

$$\ell(\Phi) \leq c_6 2^{n+\alpha(n/p)\lceil n/p \rceil}, \quad (10)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq D(\Phi) \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_7 p, \quad (11)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq T_{\tilde{u}}(\Phi') \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_8 p, \quad (12)$$

$$\tau_B n(1 - \gamma(n/p)) \leq T_{\tilde{x}}(\Phi') \leq \tau_B n(1 + \gamma(n/p)) + c_8 p + (c_9 - 1)\lfloor n/p \rfloor, \quad (13)$$

$$2p \cdot 2^{\lfloor n/p \rfloor} \leq d \leq 2p \cdot 2^{\lceil n/p \rceil(1+\alpha(n/p))}. \quad (14)$$

Кроме того, для альтернирования ФАЛ  $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$  справедливы оценки

$$\text{alt}(g_i) \leq c_{10} \cdot (n/q) \quad (1 \leq i \leq d). \quad (15)$$

**Доказательство.** Используя лемму 1, найдем в базисе  $B$  формулы  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}''$ , для которых при некоторых бесконечно малых  $\alpha_0, \gamma_0$  выполняются соотношения:

$$2^{\lfloor n/p \rfloor} \leq R(\mathcal{F}') \leq 2^{\lfloor n/p \rfloor(1+\alpha_0(\lfloor n/p \rfloor))}, \quad (16)$$

$$2^{\lceil n/p \rceil} \leq R(\mathcal{F}'') \leq 2^{\lceil n/p \rceil(1+\alpha_0(\lceil n/p \rceil))}, \quad (17)$$

$$D(\mathcal{F}') = \tau_B \lfloor n/p \rfloor (1 \pm \gamma_0(\lfloor n/p \rfloor)), \quad (18)$$

$$D(\mathcal{F}'') = \tau_B \lceil n/p \rceil (1 \pm \gamma_0(\lceil n/p \rceil)). \quad (19)$$

Без ограничения общности будем считать формулы  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}''$  абсолютными, так как переименование переменных не изменяет глубину формулы.

Представим число  $n$  в виде  $n = p \cdot \lfloor n/p \rfloor + q$ , где  $0 \leq q < p$ . Определим числа  $n_1, \dots, n_p$  равенствами<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Если  $q = 0$ , то все числа  $n_1, \dots, n_p$  надо считать равными  $(n/p)$ .

$$n_1 = \dots = n_{p-r} = \lfloor n/p \rfloor, \quad n_{p-r+1} = \dots = n_p = \lceil n/p \rceil.$$

Пусть формулы  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  заданы равенствами<sup>1</sup>:

$$\mathcal{F}_1 = \dots = \mathcal{F}_{p-q} = \mathcal{F}', \quad \mathcal{F}_{p-q+1} = \dots = \mathcal{F}_p = \mathcal{F}''.$$

Определим для каждого целого  $r, 1 \leq r \leq p$ , вспомогательные величины  $\lambda(r), d_r$  равенствами:

$$\lambda(r) = n - \sum_{i=1}^r n_i, \tag{20}$$

$$d_r = \sum_{i=1}^r \left( R(\mathcal{F}_i) + 2^{n_i} \right) \tag{21}$$

и положим  $\lambda(0) = n, d_0 = 0$ .

Введем обозначения для групп переменных:

$$\tilde{x}_r = (x_{\lambda(r)+1}, \dots, x_n), \quad \hat{x}_r = (x_{\lambda(r)+1}, \dots, x_{\lambda(r-1)}), \tag{22}$$

$$\tilde{u}_{r,s} = \left( u_{(s-1)2^{n-\lambda(r)}+1}, \dots, u_{s2^{n-\lambda(r)}} \right), \quad s = 1, \dots, 2^{\lambda(r)}, \tag{23}$$

$$\tilde{w}_r = (w_1, \dots, w_{d_r}), \quad \hat{w}_r = (w_{d_{r-1}+1}, \dots, w_{d_r}). \tag{24}$$

Опишем последовательный процесс построения формулы  $\Phi$ , состоящий из  $p$  шагов. На первом шаге для каждого  $j_1, 1 \leq j_1 \leq 2^{\lambda(1)}$ , применяя лемму 5 к формуле  $\mathcal{F}_1$  и тривиальному разбиению куба  $B^{n-\lambda(1)}$  от переменных  $\tilde{x}_1$ , положив в лемме 5 величину  $d$  равной  $2^{n-\lambda(1)}$ , а величину  $p$  – равной  $R(\mathcal{F})$ , получим неповторную формулу  $\mathcal{F}_{1,j_1}(\tilde{u}_{1,j_1}, \tilde{w}_1)$  и ФАЛ  $g_i(\hat{x}_1), 1 \leq i \leq d_1$ , которые согласно заключительной части утверждения леммы 5, в силу того что  $\delta(\mathcal{F}) \leq D(\mathcal{F})/D_{\min}$ , удовлетворяют соотношению (15). Согласно (6)–(9) при  $l=1$  справедливы следующие утверждения:

$$\mathcal{F}_{l,j_l}(\tilde{u}_{l,j_l}, g_1(\tilde{x}_l), \dots, g_{d_l}(\tilde{x}_l)) \text{ реализует } \mu_{n-\lambda(l)}(\tilde{x}_l, \tilde{u}_{l,j_l}), \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq D(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + c_7 l, \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq T_{\tilde{u}}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + c_8 l, \tag{27}$$

<sup>1</sup> В случае  $q = 0$  все формулы  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  совпадают с формулой  $\mathcal{F}'$ .

$$\sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) \leq T_{\hat{x}_l}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l D(\mathcal{F}_i) + (c_9 - 1)D(\mathcal{F}_1) + c_8 l, \quad (28)$$

$$\ell(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leq \sum_{i=1}^l 2^{n-\lambda(i)} \ell(\mathcal{F}_i) + c_4 \sum_{i=1}^l 2^{n-\lambda(i-1)}. \quad (29)$$

Рассмотрим шаг с номером  $r$ ,  $2 \leq r \leq p$ . Применим лемму 5 к формуле  $\mathcal{F}_r$  и тривиальному разбиению куба  $B^{\lceil n/p \rceil}$  от переменных  $\hat{x}_r$ , положив в лемме 5 величину  $d$  равной  $2^{\lceil n/p \rceil}$ , а величину  $p$  – равной  $R(\mathcal{F})$ , в результате чего получим неповторную формулу  $\mathcal{G}_r(\tilde{y}, \hat{w}_r)$ ,  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{2^{\lceil n/p \rceil}})$ , и ФАЛ  $g_i(\hat{x}_r)$ ,  $d_{r-1} + 1 \leq i \leq d_r$ , аналогично рассмотренному выше, удовлетворяющие соотношению (15), такие что блок-формула  $\mathcal{G}_r(\tilde{y}, g_{d_{r-1}+1}(\hat{x}_r), \dots, g_{d_r}(\hat{x}_r))$  реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_{\lceil n/p \rceil}(\hat{x}_r, \tilde{y})$ . Для каждого  $j_r$ ,  $1 \leq j_r \leq 2^{\lambda(r)}$ , определим формулу  $\mathcal{F}_{r,j_r}$  равенством

$$\mathcal{F}_{r,j_r}(\tilde{u}_{r,j_r}, \tilde{w}_r) = \mathcal{G}_r \left( \mathcal{F}_{r-1, (j_r-1)2^{\lceil n/p \rceil} + 1}, \dots, \mathcal{F}_{r-1, j_r} 2^{\lceil n/p \rceil}, \hat{w}_r \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что если для неповторных формул  $\mathcal{F}_{r-1, j_{r-1}}$ ,  $1 \leq j_{r-1} \leq 2^{\lambda(r-1)}$ , построенных на предыдущем шаге, выполнены утверждения (25)–(29), взятые для  $l = r - 1$ , то они выполнены и для формулы  $\mathcal{F}_{r, j_r}$  при  $l = r$ , которая также будет неповторной.

На последнем шаге, когда  $r = p$ , получаем искомую неповторную формулу  $\Phi = \mathcal{F}_{p,1}$ , для которой неравенства (26)–(28) с учетом (18), (19) дают (11)–(13). ФАЛ  $g_i(\tilde{x})$ ,  $1 \leq i \leq d = d_p$ , из условия леммы с точностью до несущественных переменных совпадают с одноименными ФАЛ, построенными по ходу доказательства, для которых справедливость соотношений (15) нами установлена. При помощи (21), используя соотношения (16), (17), для оценки величины  $R(\mathcal{F})$ , имея в виду (20), получим неравенства (14). Кроме того, для структурной сложности формулы  $\mathcal{F}$  записывается оценка

$$\ell(\mathcal{F}) \leq \frac{R(\mathcal{F}) - 1}{k_{\min} - 1}, \quad (30)$$

которая вместе с соотношениями (16), (17), (29) при  $c_6 = 2 \cdot (2 + c_4)$  дает нам неравенства (10). *Лемма доказана.*

Из леммы 6 при приближении параметра  $p$  сколь угодно близко к конечной доли числа  $n$  вытекает следующее утверждение.

**Лемма 7.** В обозначениях леммы 6 для любой сколь угодно медленно растущей функции  $\zeta$ , отделенной от нуля числом  $\varepsilon > 0$ , любого натураль-

ного  $n$  и некоторого числа  $d = d(n)$  в базисе  $B$  можно построить такую неповторную формулу  $\Phi(\tilde{u}, \tilde{w})$ , что для некоторых ФАЛ  $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$  блок-формула  $\Phi' = \Phi(\tilde{u}, g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x}))$  реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{u})$ . При этом структурная сложность формулы  $\Phi$ , ее глубина, задержка блок-формулы  $\Phi'$ , число  $d$  удовлетворяют соотношениям:

$$\ell(\Phi) \leq (c_6 / \varepsilon) \cdot \zeta(n) 2^n, \quad (31)$$

$$D(\Phi) = \tau_B n \pm o(n), \quad (32)$$

$$T(\Phi') = \tau_B n \pm o(n), \quad (33)$$

$$d = o(n \cdot \zeta(n)). \quad (34)$$

Для альтернирования ФАЛ  $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$  выполняются неравенства

$$\text{alt}(g_i) \leq c_{11} \log_2(\zeta(n) / \varepsilon) \quad (1 \leq i \leq d). \quad (35)$$

### 3. Верхние оценки функций Шеннона. Построение формул, асимптотически оптимальных по глубине, задержке и сложности

Для доказательства утверждений, связанных с реализацией произвольной ФАЛ, используется техника [4, 5] и в этой связи нам понадобится ряд дополнительных понятий, первое из которых – понятие универсального множества ФАЛ. Рассмотрим произвольную ФАЛ  $\varphi(y_1, \dots, y_p)$ , которая существенно зависит от всех своих переменных. Множество ФАЛ  $G \subseteq P_2(m)$  будем называть  $\varphi$ -универсальным порядка  $m$ , если любая ФАЛ  $g \in P_2(m)$  представима в виде суперпозиции «внешней» ФАЛ  $\varphi$  и «внутренних» ФАЛ  $g_1, \dots, g_p \in G$  вида

$$g = \varphi(g_1, \dots, g_p). \quad (36)$$

Следуя [6], будем строить  $\varphi$ -универсальное множество на основе разбиения  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ ,  $d \leq p$ , булевого куба  $B^m$ . Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , в силу существенной зависимости ФАЛ  $\varphi$  по переменной  $y_i$  найдется набор булевых констант  $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$  такой, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$

Для каждого указанного  $i$  рассмотрим множество  $G^{(i)}$  всех тех ФАЛ из  $P_2(m)$ , которые на множестве наборов  $\delta_j$ ,  $1 \leq j \leq d$  и  $j \neq i$ , равны  $\alpha_{i,j}$ . Положим по определению  $G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$ . Нетрудно убедиться, что теперь равенство (36) имеет место для любой ФАЛ  $g$ , если в качестве ФАЛ  $g_j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , выбрать ФАЛ из  $G^{(j)}$ , которая на  $\delta_j$  совпадает с ФАЛ  $g \oplus \alpha_{j,j}$ , а в случае  $d < p$  положить ФАЛ  $g_i$ ,  $d < i \leq p$ , равной той

единственной ФАЛ, которая составляет множество  $G^{(i)}$ . Следовательно, построенное таким образом по разбиению  $\Delta$  множество  $G$  является  $\varphi$ -универсальным порядка  $m$ . Мы доказали следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для любой существенной ФАЛ  $\varphi(y_1, \dots, y_p)$  и любого разбиения  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$  куба  $B^m$  на  $p$  компонент существует  $\varphi$ -универсальное множество  $G$  ФАЛ из  $P_2(m)$  мощности не превосходящей  $2^{|\delta_1|} + \dots + 2^{|\delta_p|}$ .

**Замечание.** Как мы видели, утверждение 1 применимо и в том случае, когда количество компонент  $d$  разбиения  $\Delta$  меньше  $p$ . В этом случае необходимо формально считать недостающие компоненты пустыми:  $\delta_{d+1} = \dots = \delta_p = \emptyset$ . Соответствующие пустым компонентам множества  $G^{(d+1)}, \dots, G^{(p)}$  содержат каждое по одной ФАЛ.

Второе понятие, которое необходимо нам для дальнейших построений – это понятие регулярного множества двоичных наборов. Пусть  $m < q$ , назовем множество наборов  $\delta \subset B^q$   $m$ -регулярным, если  $|\delta| = 2^m$  и все префиксы длины  $m$  наборов из  $\delta$  различны. Регулярное множество наборов  $\delta$  интересно тем, что любая ФАЛ из  $P_2(q)$  на нем совпадает с некоторой ФАЛ из  $P_2(m)$ , если рассматривать  $P_2(m)$  как множество всех ФАЛ из  $P_2(q)$  с несущественными переменными  $x_{m+1}, \dots, x_q$ . При этом некоторые ФАЛ из  $P_2(m)$  совпадают на  $\delta$  с переменными  $x_1, \dots, x_q$  или их отрицаниями, а именно: этим свойством обладают ФАЛ системы  $\tilde{\psi} \in P_2^{q-m}(m)$  такой, что двоичный набор  $\tilde{\gamma} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , где  $\tilde{\alpha} \in B^m$ ,  $\tilde{\beta} \in B^{q-m}$ , принадлежит  $\delta$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\psi}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}$ .

В связи с указанными свойствами регулярных множеств дадим следующее определение о моделировании ФАЛ. Пусть  $G$  – множество, содержащее ровно  $\lambda$  ФАЛ из  $P_2(m)$ , а  $\Delta = (\delta_0, \dots, \delta_{2^{q-m}-1})$  – разбиение куба  $B^q$  на  $m$ -регулярные компоненты. Скажем, что разбиение  $\Delta$  моделирует ФАЛ множества  $G$  с помощью переменных или их отрицаний, если для любого  $j$ ,  $0 \leq j \leq 2^{q-m} - 1$ , любая ФАЛ  $g$  из  $G$  совпадает на  $\delta_j$  с некоторой переменной  $x_1, \dots, x_q$ , или ее отрицанием. При этом компонента  $\delta_j$  считается хорошей компонентой разбиения  $\Delta$  относительно множества  $G$  в том случае, когда любая ФАЛ  $g$  из  $G$  совпадает на  $\delta_j$  с некоторой переменной  $x_1, \dots, x_q$  в чистом виде (без отрицания). Если компонента не является хорошей, то мы называем ее плохой. Справедливо утверждение (см. по этому поводу также [4, § 2]).

**Утверждение 2.** Для любых натуральных чисел  $m$ ,  $\lambda$ ,  $q$ , связанных соотношением  $m + \lambda \leq q$ , и любого множества  $G$  ФАЛ из  $P_2(m)$  мощности

$\lambda$  найдется разбиение  $\Delta = (\delta_0, \dots, \delta_{2^{q-m}-1})$  куба  $B^q$  на  $m$ -регулярные компоненты, моделирующее ФАЛ множества  $G$  с помощью переменных или их отрицаний и такое, что компонента  $\delta_{\tilde{\beta}}$ ,  $\tilde{\beta} \in B^{q-m}$ , является хорошей относительно  $G$ , когда число нулей в наборе  $\tilde{\beta}$  не меньше  $\lambda$ .

**Утверждение 3.** Если в условиях утверждения 2  $q \geq m + 3\lambda$ , то для некоторой положительной константы  $c$ , меньшей единицы, число плохих компонент разбиения  $\Delta$  не превосходит  $c^{q-m}$ .

**Лемма 8.** Для любой сколь угодно медленно растущей функции  $\zeta = o(2^n)$  и любого натурального числа  $n$  в (конечном, полном) базисе  $B$  найдется формула  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n$ , которая реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ , зависящую от переменных  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\tilde{y} = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$ , является бесповторной по переменным  $\tilde{y}$ , и для глубины, задержки, сложности которой выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{M}) \leq \tau_B n + o(n), \tag{37}$$

$$T(\mathcal{M}) \leq \tau_B n + o(n), \tag{38}$$

$$L(\mathcal{M}) = O(\zeta(n)2^n). \tag{39}$$

**Доказательство.** Используем лемму 7 для построения приведенных в ее утверждении формулы  $\Phi$  и ФАЛ  $g_1(\tilde{x}), \dots, g_d(\tilde{x})$ . Для установления соотношений (37), (38) необходимо для каждого  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , построить формулу  $\mathcal{G}_j$ , которая реализует ФАЛ  $g_j$  со структурной глубиной  $\delta(\mathcal{G}_j) = o(n)$ , так как глубина и задержка отличаются от структурной глубины не более чем в константу раз. После этого вследствие (32), (33) формула  $\mathcal{M}_n = \Phi(\tilde{y}, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_d)$  будет искомой.

Найдем для каждого указанного  $j$  по лемме 4 формулу  $\mathcal{G}'_j$ , реализующую  $g_j$  над стандартным базисом  $B_0$ , для которой из (4), (5), (35) вытекает

$$\delta(\mathcal{G}'_j) = O(\log(n \cdot \log \zeta(n))), \quad \ell(\mathcal{G}'_j) = O(n(\log n)(\log \zeta(n))). \tag{40}$$

Формулу  $\mathcal{G}_j$  над базисом  $B$  получим из формулы  $\mathcal{G}'_j$  заменой всех функциональных элементов  $\varepsilon_{\&}$ ,  $\varepsilon_{\vee}$ ,  $\varepsilon_{\neg}$  на моделирующие их в базисе  $B$  бесповторные по существенным переменным формулы  $\mathcal{K}_{\&}$ ,  $\mathcal{K}_{\vee}$ ,  $\mathcal{K}_{\neg}$ . Окончательно для глубины, задержки, сложности формулы  $\mathcal{G}_j$  имеем

$$D(\mathcal{G}_j) = O(\delta(\mathcal{G}'_j)), \quad T(\mathcal{G}_j) = O(\delta(\mathcal{G}'_j)), \quad L(\mathcal{G}_j) = O(\ell(\mathcal{G}'_j)),$$

что вместе с (31), (34), (40) при условии  $\zeta = o(2^n)$  завершает доказательство. Лемма доказана.

**Лемма 9.** Пусть  $n$  – натуральное число, тогда для любой ФАЛ  $f \in P_2(n)$  найдется реализующая ее над (конечным, полным) базисом  $B$  формула  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ , для глубины, задержки, сложности которой выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{F}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (41)$$

$$T(\mathcal{F}) \leq \tau_B n + o(n), \quad (42)$$

$$L(\mathcal{F}) \leq \rho_B \frac{2^n}{\log_2 n} + o\left(\frac{2^n}{\log n}\right). \quad (43)$$

**Доказательство.** Пусть приведенный вес базиса  $B$  достигается (2) на функциональном элементе  $\varepsilon_r$ , т.е.  $\rho_B = L_r / (k_r - 1)$ . Построим из  $t$ , где  $t$  – натуральный параметр, элементов  $\varepsilon_r$  абсолютную формулу  $\Phi(z_1, \dots, z_p)$  с  $p$  входами, которая реализует ФАЛ  $\varphi(z_1, \dots, z_p)$  и имеет вид квазиполного дерева, состоящего из  $\lceil \log_{k_r} p \rceil$  ярусов. По построению формулы  $\Phi$  величина  $p$  определяется равенством

$$p = t(k_r - 1) + 1.$$

Рассмотрим в качестве параметров натуральные числа  $m = m(n)$ ,  $s = s(n)$ , которые будем считать основными параметрами, и подчиним им величину  $t = t(m, s)$  таким образом, чтобы  $p = p(m, s)$  оказалось наименьшим числом, большим или равным  $2^m/s$ . Очевидно, между числами  $m$ ,  $s$ ,  $p$  выполняются отношения

$$\frac{2^m}{s} \leq p < \frac{2^m}{s} + (k_r - 1).$$

Рассмотрим разбиение  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$  куба  $B^m$  на  $d = \lceil 2^m/s \rceil$  последовательных отрезков такое, что  $\pi_1 = \dots = \pi_d = s$ ,  $\pi_d \leq s$ . Используя утверждение 1, построим на основе разбиения  $\Pi$   $\varphi$ -универсальное множество ФАЛ  $G \subseteq P_2(m)$ , мощность  $\lambda$  которого не превосходит  $p \cdot 2^s$ . Положим натуральное число  $q = q(m, s)$  равным  $(m + 3p \cdot 2^s)$ , тогда будут выполняться неравенства

$$m + 3\lambda \leq q < n,$$

если предположить число  $n$  достаточно большим для того, чтобы выбор параметров  $m$ ,  $s$  представлялся возможным. Построим с использованием утверждений 2, 3 разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2q-m})$  куба  $B^q$  от переменных группы  $\vec{x}^1 = (x_1, \dots, x_q)$  на  $m$ -регулярные компоненты и рассмотрим

следующее разложение ФАЛ  $f$  по последним  $(n - q)$  переменным группы  $\tilde{x}' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in B^{n-q}} K_{\sigma}(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma}(\tilde{x}'), \quad (44)$$

в котором через  $K_{\sigma}(\tilde{x}')$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-q})$ , обозначена элементарная конъюнкция вида  $x_{q+1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_{n-q}}$ . Разложим ФАЛ  $f_{\sigma} \in P_2(q)$  по компонентам разбиения  $\Delta$ :

$$f_{\sigma}(x') = \bigvee_{j=1}^{2^{q-m}} \chi_j(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma,j}(\tilde{x}'), \quad (45)$$

где  $\chi_j$  – характеристическая ФАЛ компоненты  $\delta_j$ . В силу  $m$ -регулярности разбиения  $\Delta$  для любого набора  $\sigma \in B^{n-q}$  и номера  $j \in [1, 2^{m-q}]$  ФАЛ  $f_{\sigma,j}(\tilde{x}')$  совпадает на  $\delta_j$  с некоторой ФАЛ  $g_{\sigma,j}(\hat{x})$ ,  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , т.е.

$$\chi_j(\tilde{x}') \cdot f_{\sigma,j}(\tilde{x}') = \chi_j(\tilde{x}') \cdot g_{\sigma,j}(\hat{x}), \quad (46)$$

а в силу  $\varphi$ -универсальности множества  $G$  для указанных  $\sigma$ ,  $j$ , найдутся ФАЛ  $g_{\sigma,j,1}, \dots, g_{\sigma,j,p} \in G$  такие, что верно представление

$$g_{\sigma,j}(\hat{x}) = \varphi(g_{\sigma,j,1}(\hat{x}), \dots, g_{\sigma,j,p}(\hat{x})). \quad (47)$$

Однако ФАЛ  $g_{\sigma,j,1}, \dots, g_{\sigma,j,p}$  на компоненте  $\delta_j$  разбиения  $\Delta$  совпадают с некоторыми переменными  $x_{m+1}, \dots, x_q$  или их отрицаниями, т.е. совпадают соответственно с ФАЛ  $x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}$ , где  $\alpha_{\sigma,j,1}, \dots, \alpha_{\sigma,j,p}$  – некоторые булевские константы, а  $v_{\sigma,j,1}, \dots, v_{\sigma,j,p}$  – натуральные числа отрезка  $[m+1, q]$ , поэтому из (47) следует

$$g_{\sigma,j}(\hat{x}) = \varphi\left(x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}\right). \quad (48)$$

Из соотношений (44)–(46), (48), меняя порядок суммирования в дизъюнкциях, получаем следующее представление ФАЛ  $f$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{2^{q-m}} \chi_j(\tilde{x}') \cdot \left( \bigvee_{\sigma \in B^{n-q}} K_{\sigma}(\tilde{x}') \cdot \varphi\left(x_{v_{\sigma,j,1}}^{\alpha_{\sigma,j,1}}, \dots, x_{v_{\sigma,j,p}}^{\alpha_{\sigma,j,p}}\right) \right). \quad (49)$$

Искомая формула  $\mathcal{F}$  получается на основе представления (49) ФАЛ  $f$  следующим образом. Воспользуемся леммой 1 для построения над  $B$  формулы  $\Psi$ , для которой при некоторых бесконечно малых  $\alpha$ ,  $\gamma$  выполняются соотношения

$$2^{q-m} \leq R(\Psi) \leq 2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}, \quad (50)$$

$$D(\Psi) \leq \tau_B(q-m)(1+\gamma(q-m)). \quad (51)$$

Используя лемму 5, подберем для формулы  $\Psi$ , реализуемой ею ФАЛ, разбиения  $\Delta$ , формулу  $\Phi_0$  и ФАЛ  $g_1(\tilde{x}'), \dots, g_{d_0}(\tilde{x}')$ ,  $d_0 = R(\Psi) + 2^{q-m}$  такие что блок-формула  $\Phi'_0$ , заданная равенством  $\Phi'_0 = \Phi_0(\tilde{u}', g_1(\tilde{x}'), \dots, g_{d_0}(\tilde{x}'))$ , реализует связанную с разложением (45) мультиплексорную ФАЛ  $\mu_\Delta(\tilde{u}', \tilde{x}')$ . Из (6)–(9) с использованием неравенств (50), (51), а также неравенств (30), записанных для формулы  $\Psi$ , вытекают соотношения:

$$d_0 = O\left(2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}\right),$$

$$\ell(\Phi_0) = O\left(2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))}\right),$$

$$D(\Phi_0) \leq D(\Psi) + c_7,$$

$$T_{\tilde{u}'}(\Phi'_0) \leq D(\Psi) + c_8,$$

$$T_{\tilde{x}'}(\Phi'_0) \leq c_9 D(\Psi) + c_8.$$

Пусть построенная над Б формула  $\mathcal{G}_i$ ,  $1 \leq i \leq d_0$ , реализует ФАЛ  $g_i(\tilde{x}')$  моделированием ее совершенной дизъюнктивной нормальной формы при помощи полученных в формул  $\mathcal{K}_\&$ ,  $\mathcal{K}_\vee$ ,  $\mathcal{K}_\neg$ , реализующих соответственно ФАЛ  $x_1 \cdot x_2$ ,  $x_1 \vee x_2$ ,  $\bar{x}_1$  бесповторно по своим существенным переменным, тогда

$$L(\mathcal{G}_i) = O(q \cdot 2^q), \quad D(\mathcal{G}_i) = O(q), \quad T(\mathcal{G}_i) = O(q) \quad (1 \leq i \leq d_0).$$

В соответствии с вышесказанным бесповторная по информационным переменным  $\tilde{u}'$  формула  $\mathcal{M}_0 = \Phi_0(\tilde{u}', \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{d_0})$  реализует ФАЛ  $\mu_\Delta(\tilde{u}', \tilde{x}')$ , для нее выполняются соотношения:

$$L(\mathcal{M}_0) = O\left(q \cdot 2^{(q-m)(1+\alpha(q-m))+q}\right),$$

$$D_{\tilde{u}'}(\mathcal{M}_0) = \tau_B(q-m)(1 \pm \gamma'_1(q-m)),$$

$$T_{\tilde{u}'}(\mathcal{M}_0) = \tau_B(q-m)(1 \pm \gamma'_2(q-m)),$$

$$D_{\tilde{x}'}(\mathcal{M}_0) = O(q), \quad T_{\tilde{x}'}(\mathcal{M}_0) = O(q). \quad (52)$$

Мультиплексорная ФАЛ  $\mu_{n-q}(\tilde{u}', \tilde{x}')$ , связанная с разложением (44), реализуется с помощью леммы 8, бесповторной по информационным переменным формулой  $\mathcal{M}_1$ , для которой при выборе  $\zeta(n) = o(\log n)$  выполняются соотношения:

$$L(\mathcal{M}_1) = o(\log(n-q) \cdot 2^{n-q}),$$

$$D(\mathcal{M}_1) = \tau_B(n-q)(1 \pm \gamma'_3(n-q)),$$

$$T(\mathcal{M}_1) = \tau_B(n-q)(1 \pm \gamma'_4(n-q)). \quad (53)$$

Из вышесказанного следует, что при выполнении условий

$$q - m = \omega(1), \quad n - q = \omega(1), \quad q = o(2^n / \log n)$$

для сложности, глубины, задержки формулы  $\mathcal{F}$ , построенной на основе разложения (49) с использованием формул  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_1$ ,  $\Phi$ ,  $\mathcal{K}_-$ , для некоторой положительной константы  $c < 1$  выполняются следующие соотношения:

$$D(\mathcal{F}) \leq \tau_B(n-m)(1 \pm o(1)) + O(\log p),$$

$$T(\mathcal{F}) \leq \tau_B(n-m)(1 \pm o(1)) + O(\log p),$$

$$L(\mathcal{F}) \leq L(\mathcal{M}_0) + 2^{q-m} L(\mathcal{M}_1) + 2^{n-m} L(\Phi)(1 + O(p \cdot c^{q-m})),$$

откуда при выборе параметров

$$m = \lfloor 2 \log_2 \log_2 n \rfloor, \quad s = \lfloor \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n \rfloor$$

из (52), (53) вытекают (41)–(43). Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 3, 9.

### Список литературы

1. Ложкин, С. А. О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам и входным наборам / С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2013. – № 4. – С. 25–33.
2. Данилов, Б. Р. О поведении функции Шеннона для задержки схем в модели, где задержка соединений определяется типами соединяемых элементов / Б. Р. Данилов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 78–100.
3. Лупанов, О. Б. О схемах функциональных элементов с задержками / О. Б. Лупанов // Проблемы кибернетики. – Вып. 23. – М.: Наука, 1970. – С. 43–82.
4. Ложкин, С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов / С. А. Ложкин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 6. – М.: Наука, 1996. – С. 189–214.
5. Ложкин, С. А. О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе / С. А. Ложкин // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. – 1996. – № 2 – С. 80–82.
6. Ложкин, С. А. Основы кибернетики / С. А. Ложкин. – М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. – 251 с.
7. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский; под ред. В. А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.
8. Данилов, Б. Р. О поведении функции Шеннона для обобщенной глубины схем в модели, где глубина межэлементного соединения определяется над схемой ограниченного размера / Б. Р. Данилов // Материалы X молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 6–8 октября 2015 г.). – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. – С. 18–23.
9. Ложкин, С. А. О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам /

С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов // Прикладная математика и информатика. – 2011. – № 39. – С. 107–129.

### **References**

1. Lozhkin S. A., Danilov B. R. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2013, no. 4, pp. 25–33.
2. Danilov B. R. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 78–100.
3. Lupanov O. B. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 23. Moscow: Nauka, 1970, pp. 43–82.
4. Lozhkin S. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 6. Moscow: Nauka, 1996, pp. 189–214.
5. Lozhkin S. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika* [Bulletin Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics]. 1996, no. 2, pp. 80–82.
6. Lozhkin S. A. *Osnovy kibernetiki* [Fundamentals of cybernetics]. Moscow: Izd. otдел f-ta VMiK MGU, 2004, 251 p.
7. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku: ucheb. posobie dlya vuzov* [Introduction into discrete mathematics: tutorial for universities]. 4th ed. Moscow: Vysshaya shkola, 2003, 384 p.
8. Danilov B. R. *Materialy X molodezhnoy nauchnoy shkoly po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moskva, 6–8 oktyabrya 2015 g.)* [Proceedings of X youth scientific school on discrete mathematics and application thereof (Moscow, 6–8 October 2015)]. Moscow: IPM im. M. V. Keldysha, 2015, pp. 18–23.
9. Lozhkin S. A., Danilov B. R. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. 2011, no. 39, pp. 107–129.

---

#### **Данилов Борис Радиславович**

младший научный сотрудник,  
Московский государственный  
университет имени М. В. Ломоносова  
(Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: brdanilov@gmail.com

#### **Danilov Boris Radislavovich**

Research assistant, Lomonosov Moscow  
State University (1 Leninskie gory street,  
Moscow, Russia)

---

УДК 519.714

**Данилов, Б. Р.**

**Об одновременной оптимизации формул по сложности и задержке на наборах в модели с задержками соединений между элементами / Б. Р. Данилов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 55–74.**

*Е. Д. Деревянчук, А. С. Шутков*

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДИАФРАГМЫ В ВОЛНОВОДЕ<sup>1</sup>

**Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Исследование обратной задачи определения электромагнитных и геометрических параметров многосекционной диафрагмы, помещенной в прямоугольный волновод, по коэффициентам прохождения или отражения.

*Материалы и методы.* Задача рассматривается как обратная задача электродинамики, представлена в виде краевой задачи для уравнений Максвелла; для доказательства теоремы существования и единственности решения обратной задачи восстановления электромагнитных и геометрических параметров по коэффициенту отражения применяются общие методы теории краевых задач, теории приближенных методов решения нелинейных систем уравнений.

*Результаты.* Получены численные и аналитические решения обратных задач восстановления электромагнитных и геометрических параметров многосекционной диафрагмы по коэффициентам прохождения или отражения; доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи восстановления электромагнитных и геометрических параметров односекционной диафрагмы по коэффициенту отражения.

*Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при определении электромагнитных свойств и геометрических параметров образцов слоистых или композитных материалов.

**Ключевые слова:** обратная задача электродинамики, многосекционная диафрагма, односекционная диафрагма, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, теорема существования и единственности, прямоугольный волновод.

*Е. D. Derevyanchuk, A. S. Shutkov*

## A NUMERICAL METHOD OF DETERMINATION OF ELECTROMAGNETIC AND GEOMETRICAL PARAMETERS OF A DIAPHRAGM IN A WAVEGUIDE

**Abstract.**

*Background.* The aim of the work is to study an inverse problem of reconstruction of electromagnetic and geometrical parameters of a multi-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the transmission or reflection coefficients.

*Material and methods.* The problem is considered as an inverse problem of electrodynamics; it is presented as a boundary value problem for Maxwell's equations; to prove the theorem of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a one-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the reflection coefficient, the researchers applied the theory of boundary value problems for Maxwell's equations, the theory of approximate methods for solving nonlinear systems.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена частично при финансовой поддержке гранта Минобрнауки РФ № 2.11.02.2014/К (проектная часть) и Стипендии Президента РФ № 1311.2015.5.

*Results.* The authors developed numerical and analytical solutions of inverse problems for a multi-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the transmission and reflection coefficients; the theorem of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a one-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the reflection coefficient was proved.

*Conclusions.* The obtained results can be used for determination of electromagnetic characteristics and geometrical parameters of composite materials.

**Key words:** inverse electrodynamic problem, multi-sectional diaphragm, one-sectional diaphragm, permittivity, permeability, existence and uniqueness problem, rectangular waveguide.

## Введение

Определение электромагнитных и геометрических параметров диэлектрического тела стало одной из актуальных проблем электродинамики с появлением композитных материалов. На практике восстановить характеристики такого рода материалов, как правило, невозможно. Поэтому для решения данной задачи необходимо разрабатывать методы математического моделирования, которые бы позволили восстанавливать эти характеристики по измеряемым на практике параметрам, таким как коэффициенты прохождения или отражения.

Данная статья посвящена обратной задаче восстановления электромагнитных и геометрических параметров многосекционной диафрагмы по коэффициентам прохождения или отражения. Работа является развитием результатов, полученных в работах [1–4]. В отличие от работ [1, 2], где исследовались обратные задачи восстановления *геометрических* параметров многосекционной диафрагмы, и работ [3, 4], где были получены результаты для обратных задач восстановления *электромагнитных* параметров многосекционной диафрагмы, в данной статье исследуются обратные задачи восстановления *одновременно и электромагнитных, и геометрических* характеристик многосекционной диафрагмы.

Обратные задачи сводятся к решению соответствующих краевых задач для системы уравнений Максвелла. На основе разработанного в работах [3, 4] рекуррентного метода получены решения поставленных обратных задач для многосекционной диафрагмы. В случае односекционной диафрагмы решение обратной задачи восстановления электромагнитных и геометрических параметров по коэффициенту отражения имеет явный вид; доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи.

Разработанные численные и аналитические методы решения поставленных обратных задач реализованы в виде комплекса программ и апробированы для одно-, двух- и трех-секционной диафрагм.

### 1. Постановка обратной задачи дифракции

Сформулируем математическую постановку обратной задачи восстановления электромагнитных и геометрических параметров многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения.

Пусть в декартовой системе координат задан волновод  $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$  с идеально проводящей поверхно-

стью  $\partial P$ . В волноводе расположена диафрагма  $Q$  ( $Q \subset P$  – область), которая представляет собой параллелепипед  $Q = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < l\}$ , разделенный на  $n$ -секций. В  $P \setminus \bar{Q}$  среда изотропна и однородна с постоянными магнитной проницаемостью ( $\mu_0 > 0$ ) и диэлектрической проницаемостью ( $\epsilon_0 > 0$ ), каждая секция диафрагмы  $Q$  заполнена изотропной средой, диэлектрическая и магнитная проницаемости каждой секции являются скалярными величинами ( $\epsilon_j, \mu_j, j = 1, \dots, n$ ).

Поведение электромагнитного поля внутри и вне объекта, расположенного в волноводе, описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_j \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля;  $\omega$  – круговая частота.

Предполагаем, что волновод работает в *одномодовом* режиме, в этом случае в волноводе распространяется только одна волна  $H_{10}$ , при этом высшие моды экспоненциально затухают. Математически одномодовость режима достигается выбором волнового числа  $k_0$  ( $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ) в следующем диапазоне:  $\pi/a < k_0 < \pi/b$  [3]. Используя уравнения (1), рассчитаем поле внутри  $Q$ . Будем предполагать, что внешнее электрическое поле имеет вид [3]:

$$\mathbf{E}^0 = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_0 x_3} \vec{e}_2,$$

что соответствует волне типа  $H_{10}$  с известной амплитудой  $A$ ;

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \pi^2/a^2},$$

$\gamma_0$  – постоянная распространения волны  $H_{10}$ ;  $\vec{e}_2$  – орт вдоль оси  $Oy$ . Вектор  $\mathbf{H}^0$  определяется из второго уравнения системы (1).

С учетом того, что в волноводе распространяется только волна  $H_{10}$  с поляризацией

$$\mathbf{E} = (0 \ E_y \ 0), \quad \mathbf{H} = (H_x \ 0 \ H_z),$$

полное поле вне  $Q$  имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (Ae^{-i\gamma_0 z} + Be^{i\gamma_0 z}) \mathbf{e}_2, & z < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) Fe^{-i\gamma_0 z} \mathbf{e}_2, & z > l, \end{cases} \quad (2)$$

и внутри  $Q$ :

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)(C_j e^{-i\gamma_j z} + D_j e^{i\gamma_j z})\mathbf{e}_2, \quad l_{j-1} < z < l_j, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_{n+1} = \gamma_0$ ;  $A$  – амплитуда падающей волны;  $B$  и  $F$  – коэффициенты, подлежащие измерению.

На границе областей должны выполняться условия:

$$[E_y]_L = 0, \quad [H_x]_L = 0, \quad (4)$$

где  $L := \{(x, y, z) : z = 0, \dots, z = l_j, \dots, z = l_n\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $[\cdot]_L$  – скачок предельных значений функции на границе раздела сред  $L$ ;  $E_y, H_x$  – тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  соответственно.

Для рассматриваемых задач вводятся обозначения:  $P$  – обратная задача восстановления характеристик диафрагмы по значениям коэффициента прохождения  $F/A$ ;  $Q$  – обратная задача, в которой используются значения коэффициента отражения  $B/A$ . В нижнем индексе записываются неизвестные величины, в верхнем – поле чисел, в котором разыскиваются искомые величины. Тогда постановка задач имеет вид.

**Постановка обратных задач  $P_{\varepsilon_j, l_j}$  ( $Q_{\varepsilon_j, l_j}$ ):** требуется по известным коэффициентам прохождения  $F/A$  (или коэффициентам отражения  $B/A$ ) электромагнитного поля, измеренным на различных частотах, определить диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_j$  и толщину  $l_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) каждой секции многосекционной диафрагмы, помещенной в прямоугольный волновод.

Метод решения поставленных задач представлен далее.

## 2. Обратные задачи $P_{\varepsilon_j, l_j}$ и $Q_{\varepsilon_j, l_j}$

Математическая постановка задачи сводится к решению краевой задачи (1)–(4) для системы уравнений Максвелла, решая которую, получаем следующие рекуррентные зависимости коэффициента прохождения  $F/A$  от диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_j$  и толщин  $l_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) секций многосекционной диафрагмы и зависимость коэффициента отражения  $B/A$  от диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_j$  и толщин  $l_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) секций многосекционной диафрагмы:

$$\frac{F}{A} = \frac{2e^{i\gamma_0 l_n} \prod_{j=0}^n \gamma_j}{\gamma_n p_{n+1}^{(+)} + \gamma_0 q_{n+1}^{(+)}} \quad (5)$$

и

$$\frac{B}{A} = \frac{\gamma_n p_{n+1}^{(-)} + \gamma_0 q_{n+1}^{(-)}}{\gamma_n p_{n+1}^{(+)} + \gamma_0 q_{n+1}^{(+)}} \quad (6)$$

где

$$p_1 = 1, p_2^{(\pm)} = \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_1 \cos \alpha_j \pm \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_1 i \sin \alpha_j,$$

$$p_{j+1}^{(\pm)} = \gamma_{j-1} p_j^{(\pm)} \cos \alpha_j + \gamma_j q_j^{(\pm)} i \sin \alpha_j, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \gamma_{j-1} p_1 i \sin \alpha_j \pm \gamma_j q_1 \cos \alpha_j,$$

$$q_{j+1}^{(\pm)} = \gamma_{j-1} p_j^{(\pm)} i \sin \alpha_j + \gamma_j q_j^{(\pm)} \cos \alpha_j,$$

$$\gamma_j = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_j \mu_0 - \pi^2 / a^2}, \quad \alpha_j = \gamma_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Каждое из уравнений (5) и (6) представляет собой комплексное нелинейное уравнение с  $2n$  неизвестными. Для того чтобы составить систему уравнений, рассмотрим каждое из уравнений на различных частотах. В результате имеем

$$\frac{F(\omega_s)}{A} = \frac{2e^{i\gamma_0(\omega_s)l_n} \prod_{j=0}^n \gamma_j(\omega_s)}{\gamma_n(\omega_s) p_{n+1}^{(+)}(\omega_s) + \gamma_0(\omega_s) q_{n+1}^{(+)}(\omega_s)} \quad (8)$$

и

$$\frac{B(\omega_s)}{A} = \frac{\gamma_n(\omega_s) p_{n+1}^{(-)}(\omega_s) + \gamma_0(\omega_s) q_{n+1}^{(-)}(\omega_s)}{\gamma_n(\omega_s) p_{n+1}^{(+)}(\omega_s) + \gamma_0(\omega_s) q_{n+1}^{(+)}(\omega_s)}, \quad (9)$$

где  $s = 1, \dots, n$ . Решая каждую из систем (8) и (9) методом Левенберга – Марквардта, находим неизвестные соответствующей задачи  $P_{\varepsilon_j, l_j}$  или  $Q_{\varepsilon_j, l_j}$ .

### 3. Односекционная диафрагма

В случае односекционной диафрагмы получено явное решение обратной задачи  $Q_{\varepsilon_1, l_1}$ . Рассмотрим теорему существования и единственности обратной задачи  $Q_{\varepsilon_1, l_1}$ .

**Теорема.** Если

$$\frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2} < -1, \quad \varepsilon_1 \neq \frac{\pi^2}{\omega^2 \mu_0} \left( \frac{n^2}{l_1^2} + a^{-2} \right) \quad n \in Z,$$

и

$$\operatorname{ctg}(\gamma_1 l_1) = \frac{-\operatorname{Im}(B/A)}{|B/A|^2 \sqrt{\left( \frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2} \right)^2 - 1}},$$

то решение обратной задачи  $Q_{\varepsilon_1, l_1}$  существует и единственно – диэлектрическая проницаемость выражается по формуле

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{\frac{\pi^2}{a^2} + \gamma_0^2 \frac{\frac{\operatorname{Re}(B/A) - 1}{|B/A|^2}}{\frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2} + 1}}{\omega^{-2} \varepsilon_0^{-1} \mu_0^{-1}} \right), \quad (10)$$

а толщина диафрагмы  $l_1$  восстанавливается однозначно по формуле

$$l_1 = \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\gamma_0\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_0^2} \frac{1}{\operatorname{Im}(A/B)} \right) + \frac{\pi m}{\gamma_1}, \quad m \in Z, \quad (11)$$

если существуют два числа  $l_1^{(2)}$  и  $l_1^{(1)}$  такие, что  $l_1^{(2)} > l_1^{(1)}$  и  $T < |l_1^{(2)} - l_1^{(1)}| < 2T$  ( $T = \pi/\gamma_1$ ).

**Доказательство.**

Уравнение (6) в случае односекционной диафрагмы имеет вид

$$\frac{B}{A} = \frac{i(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \sin(\gamma_1 l_1)}{2\gamma_0\gamma_1 \cos(\gamma_1 l_1) + i(\gamma_0^2 + \gamma_1^2) \sin(\gamma_1 l_1)}. \quad (12)$$

Так как  $\varepsilon_1 \in R$ , то  $\gamma_1 \in R$ . Тогда, отделяя действительную и мнимую части в уравнении (12), мы получим систему

$$\begin{cases} \cos(\gamma_1 l_1) = \frac{\operatorname{Im}(B/A)}{2|B/A|^2} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right) \sin(\gamma_1 l_1), \\ \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right) \sin(\gamma_1 l_1) = \frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right) \sin(\gamma_1 l_1). \end{cases} \quad (13)$$

Из второго уравнения системы (13) имеем

$$\left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right) = \frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right) \quad (14)$$

или  $\sin(\gamma_1 l_1) = 0$

Очевидно, что система (13) не имеет решения при  $\sin(\gamma_1 l_1) = 0$ . Рассмотрим (14).

Введем следующие обозначения:  $\varphi = \frac{\operatorname{Re}(B/A)}{|B/A|^2}$  и  $\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ . Тогда из (14)

получим

$$\gamma = \sqrt{\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}}. \quad (15)$$

Выражая  $\epsilon_1$  через  $\gamma$ , имеем явное выражение (10) для  $\epsilon_1$ . Подставляя выражение (10) для диэлектрической проницаемости в первое уравнение системы (13), получим выражение (11) для толщины диафрагмы  $l_1$ .

Так как  $\gamma_1, \gamma_0 > 0$ , то выражение (15) выполняется при значениях  $\varphi < -1$ .

Подставляя выражение (15) в систему уравнений (13), имеем

$$\operatorname{ctg}(\gamma_1 l_1) = \frac{-\operatorname{Im}(B/A)}{|B/A|^2 \sqrt{\varphi^2 - 1}}. \quad (16)$$

Таким образом, если  $\gamma_1$  удовлетворяет соотношению (16),  $\gamma_1 l_1 \neq \pi n$  и  $\varphi < -1$ , то из системы (13) однозначно восстанавливается диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$  по формуле (10) и с периодом  $T = \pi/\gamma_1$  определяется толщина диафрагмы  $l_1$ . Если известен интервал  $(l_1^{(1)}, l_1^{(2)})$  значений толщин такой, что  $T < l_1^{(2)} - l_1^{(1)} < 2T$ , которому принадлежит искомая толщина  $l_1$ , то толщина  $l_1$  восстанавливается однозначно.

### 3. Численные результаты

Разработанные в разд. 1, 2 численные методы решения обратных задач были реализованы в виде комплекса программ. В табл. 1 представлены численные результаты решения обратной задачи  $P_{\epsilon_j, l_j}$ . Все единицы измерения указаны в системе СГС.

Таблица 1

Значения $\frac{F(\omega_1)}{A}, \frac{F(\omega_2)}{A}$	Вычисленные $\epsilon_1, \epsilon_2$	Вычисленные $l_1, l_2$	Точные $\epsilon_1, \epsilon_2$	Точные $l_1, l_2$
$-0,854 - 0,460i;$ $-0,517 - 0,657i$	2; 2,269	0,995; 2,004	2; 2,7	0,995; 2,004
$-0,931 - 0,312i;$ $-0,533 - 0,455i$	2; 3,205	1,298; 1,898	2; 3,2	1,3; 1,9
$0,005 + 0,968i;$ $-0,798 + 0,371i$	3,197; 4,008	1,59; 2,1004	3,2; 4	1,6; 2,1

Параметры волновода:  $a = 2,286$  см,  $b = 1$  см, измерения проводятся на частоте  $f = 11,94$  ГГц,  $f = 8,12$  ГГц, что соответствует  $\omega_1 = 75,0212$  ГГц,  $\omega_2 = 51,0195$  ГГц ( $\omega = 2\pi f$ ), амплитуда падающего поля  $A = 1$ . В первом столбце таблицы указаны значения коэффициента прохождения на каждой частоте, во втором и третьем – вычисленные значения диэлектрической проницаемости и толщины каждой секции двухсекционной диафрагмы, в последних двух столбцах указаны точные значения искомых величин.

В табл. 2 представлены численные результаты решения обратной задачи  $Q_{\epsilon_j, l_j}$ . Параметры волновода:  $a = 2$  см,  $b = 1$  см, измерения проводятся на

частоте  $f = 11,94$  ГГц,  $f = 8,12$  ГГц, что соответствует  $\omega_1 = 75,0212$  ГГц,  $\omega_2 = 51,0195$  ГГц ( $\omega = 2\pi f$ ), амплитуда падающего поля  $A = 1$ . В первом столбце таблицы указаны значения коэффициента отражения на каждой частоте, во втором и третьем – вычисленные значения диэлектрической проницаемости и толщины каждой секции двухсекционной диафрагмы, в последних двух столбцах указаны точные значения искомых величин. Из табл. 1, 2 видно, что относительная погрешность вычислений не превышает 5 %, что говорит об эффективности разработанных методов.

Таблица 2

Значения $\frac{B(\omega_1)}{A}, \frac{B(\omega_2)}{A}$	Вычисленные $\epsilon_1, \epsilon_2$	Вычисленные $l_1, l_2$	Точные $\epsilon_1, \epsilon_2$	Точные $l_1, l_2$
$-0,186+0,389i;$ $-0,763-0,013i$	1,098; 2,1003	0,199; 0,8002	1,1; 2,1	0,2; 0,8
$-0,475+0,025i;$ $-0,836-0,021i$	3,202; 2,101	1,499; 1,999	3,2; 2,1	1,5; 2
$-0,192+0,903i;$ $0,787-0,363i$	1,099; 81,981	1,7503; 2,148	1,1; 81	1,75; 2,15

### Заключение

Таким образом, разработаны численные и аналитические методы решения обратной задачи восстановления электромагнитных и геометрических параметров многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения. Разработанные численные методы реализованы в виде комплекса программ, апробированы на тестовых задачах. Представлены численные результаты решения обратной задачи для двухсекционной диафрагмы.

Следует отметить, что разработанный метод:

- прост в реализации;
- позволяет восстанавливать диэлектрическую проницаемость и толщину каждой секции многосекционной диафрагмы по измерениям коэффициентов прохождения или отражения на различных частотах;
- может применяться для изучения электромагнитных и геометрических характеристик композитных материалов.

### Список литературы

1. **Деревянчук Е. Д.** Обратная задача определения геометрических параметров слоистой диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициенту прохождения / Е. Д. Деревянчук, А. С. Шутков // XL Гагаринские чтения : тр. Междунар. молодежной науч. конф. : в 9 т. (Москва, 7–11 апреля 2014 г.). – М. : МАТИ, 2014. – Т. 5. – С. 92–94.
2. **Деревянчук, Е. Д.** Численный метод решения обратной задачи определения геометрических параметров двухслойной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициенту прохождения / Е. Д. Деревянчук, А. С. Шутков // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Пенза, 26–30 мая 2014 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 212–217.
3. **Smirnov, Yu. G.** Solution to the inverse problem of reconstructing permittivity of an n-sectional diaphragm in a rectangular waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestov

- palov and E. D. Derevyanchuk // Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2014. – Ser. 10533. P. 555–567.
4. **Smirnov, Yu. G.** Permittivity reconstruction of layered dielectrics in a rectangular waveguide from the transmission coefficient at different frequencies / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov and E. D. Derevyanchuk // Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2013. – Vol. 52. – P. 169–181.

### References

1. Derevyanchuk E. D., Shutkov A. S. *XL Gagarinskie chteniya: tr. Mezhdunar. molodezhnoy nauch. konf.: v 9 t. (Moskva, 7–11 aprelya 2014 g.)* [XL Gagarinskie readings: proceedings of the International youth scientific conference: in 9 volumes (Moscow, 7–11 April 2014)]. Moscow: MATI, 2014, vol. 5, pp. 92–94.
2. Derevyanchuk E. D., Shutkov A. S. *Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. VIII Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov (Penza, 26–30 maya 2014 g.)* [Mathematical and computer modeling of natural-scientific and social problems: proceedings of VIII International scientific and technical conference of young specialists, postgraduate and undergraduate students (Penza, 26–30 May 2014)]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, pp. 212–217.
3. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. and Derevyanchuk E. D. *Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2014, ser. 10533, pp. 555–567.
4. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. and Derevyanchuk E. D. *Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2013, vol. 52, pp. 169–181.

**Деревянчук Екатерина Дмитриевна**  
лаборант-исследователь, Научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Шутков Александр Сергеевич**  
студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Derevyanchuk Ekaterina Dmitrievna**  
Researcher-laboratory assistant, Research Center “Supercomputer modeling in electrodynamics”, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Shutkov Alexander Sergeevich**  
Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.958, 537.876.46

**Деревянчук, Е. Д.**

**Численный метод определения электромагнитных и геометрических параметров диафрагмы в волноводе / Е. Д. Деревянчук, А. С. Шутков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 75–83.**

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕНЗОРА  
МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МНОГОСЕКЦИОННОЙ  
ДИАФРАГМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ  
ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ПРОХОЖДЕНИЯ ИЛИ ОТРАЖЕНИЯ<sup>1</sup>**

**Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Исследована обратная задача восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения.

*Материалы и методы.* Обратная задача представлена в виде краевой задачи для уравнений Максвелла; для решения поставленной обратной задачи применяются общие методы теории краевых задач, теории приближенных методов решения нелинейных систем уравнений.

*Результаты.* Разработан численно-аналитический метод решения обратной задачи восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения.

*Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы при определении электромагнитных свойств анизотропных слоистых или композитных материалов.

**Ключевые слова:** обратная задача электродинамики, многосекционная диафрагма, тензор магнитной проницаемости, прямоугольный волновод.

Е. Д. Derevyanchuk

**AN INVERSE PROBLEM OF TENSOR RECONSTRUCTION  
OF A MULTI-SECTIONAL DIAPHRAGM IN A RECTANGULAR  
WAVEGUIDE BY THE TRANSMISSION  
OR REFLECTION COEFFICIENTS**

**Abstract.**

*Background.* The aim of the work is to study an inverse problem of tensor reconstruction of a multi-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the transmission or reflection coefficients.

*Material and methods.* The problem is considered as an inverse problem of electrodynamics, it is presented as a boundary value problem for Maxwell's equations; it was applied the theory of boundary value problems for Maxwell's equations, the theory of approximate methods for solving nonlinear systems.

*Results.* The author has developed a numerical-analytical solution for the inverse problem of tensor reconstruction of a multi-sectional diaphragm in a rectangular waveguide by the transmission or reflection coefficients.

*Conclusions.* The obtained results can be used for determination of electromagnetic characteristics of anisotropic composite materials.

**Key words:** inverse electrodynamics problem, multi-sectional diaphragm, permeability tensor, rectangular waveguide.

<sup>1</sup> Работа выполнена частично при финансовой поддержке гранта Минобрнауки РФ № 2.11.02.2014/К (проектная часть) и Стипендии Президента РФ № 1311.2015.5.

### Введение

Задача восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения относится к классу обратных задач электродинамики [1, 2]. Несмотря на то, что разработаны численные методы решения обратных задач для произвольных тел в прямоугольном волноводе [2], до сих пор остаются актуальными и важными для практики частные случаи такого рода задач, а именно обратные задачи для диафрагмы в волноводе. Под диафрагмой понимается параллелепипед, стенки которого плотно прилегают к стенкам волновода.

Целью данной работы является исследование обратной задачи восстановления электромагнитных характеристик анизотропной многосекционной диафрагмы по измеренным на различных частотах коэффициентам прохождения или отражения.

Данная статья является развитием результатов, полученных в работах [3, 4]. В отличие от работы [3], где исследовалась обратная задача восстановления *тензора* магнитной проницаемости *односекционной* диафрагмы, и работы [4], где были получены результаты для обратных задач восстановления тензора *диэлектрической* проницаемости *двухсекционной* диафрагмы, в данной статье исследуются обратные задачи восстановления *тензора магнитной проницаемости многосекционной* диафрагмы.

Обратные задачи сводятся к решению соответствующих краевых задач для системы уравнений Максвелла. На основе разработанного в [4] рекуррентного метода и метода «поворота» диафрагмы [3] получены решения поставленных обратных задач для многосекционной диафрагмы.

Разработанные численные методы решения обратных задач реализованы в виде комплекса программ и апробированы для двухсекционной диафрагмы.

### 1. Постановка обратной задачи дифракции

Пусть в декартовой системе координат задан волновод

$$P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$$

с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В волноводе расположена многосекционная диафрагма  $Q$  ( $Q \subset P$  – область) с секциями

$$Q_j = \{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < b, l_{j-1} < z < l_j\},$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^n Q_j,$$

здесь  $l_j - l_{j-1}$  (известная) толщина  $j$ -й секции и  $l_0 = 0, l_n = l, l$  – полная длина диафрагмы. В  $P \setminus \bar{Q}$  среда изотропна и однородна с проницаемостями  $\epsilon_0 > 0, \mu_0 > 0$ . Каждая секция  $Q_j$  диафрагмы представляет собой анизотропную среду с известным диагональным тензором диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^{(j)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

и неизвестным тензором магнитной проницаемости:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поведение электромагнитного поля внутри волновода  $P$  удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (3)$$

вне диафрагмы и

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(j)} \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)} \mathbf{H} \end{cases} \quad (4)$$

внутри диафрагмы, где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля;  $\omega > 0$  – круговая частота. Будем предполагать, что волновое число  $k_0$  ( $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ) удовлетворяет следующему диапазону:  $\pi/a < k_0 < \pi/b$  [3]. В этом случае в волноводе распространяется только волна  $H_{10}$ , волновод работает в *одномодовом* режиме. Внешнее электрическое поле имеет вид [5]:

$$\mathbf{E}^0 = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_0 x_3} \mathbf{e}_2,$$

что соответствует волне типа  $H_{10}$  с известной амплитудой  $A$ ,

$$\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \pi^2/a^2},$$

$\gamma_0$  – постоянная распространения волны  $H_{10}$ ,  $\mathbf{e}_2$  – орт вдоль оси  $Oy$ . Вектор  $\mathbf{H}^0$  определяется из второго уравнения системы (3).

С учетом того, что в волноводе распространяется только волна  $H_{10}$ , будем искать поле в волноводе в виде

$$\mathbf{E} = (0 \ E_y \ 0),$$

$$\mathbf{H} = (H_x \ 0 \ H_z).$$

Полное поле вне  $Q$  имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)(Ae^{-i\gamma_0 z} + Be^{i\gamma_0 z})\mathbf{e}_2, & z < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)Fe^{-i\gamma_0 z}\mathbf{e}_2, & z > l, \end{cases} \quad (5)$$

и внутри каждой секции  $Q_j$ :

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)(C_j e^{-i\gamma_j z} + D_j e^{i\gamma_j z})\mathbf{e}_2, \quad l_{j-1} < z < l_j, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

Здесь  $\gamma_{n+1} = \gamma_0$ ;  $A$  – амплитуда падающей волны;  $B$  и  $F$  – коэффициенты, известные из результатов измерений. На границе областей должны выполняться условия сопряжения:

$$[E_y]_L = 0, \quad [H_x]_L = 0, \quad (7)$$

где  $L := \{(x, y, z) : z = 0, \dots, z = l_j, \dots, z = l_n\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $[\cdot]_L$  – скачок предельных значений функции на границе раздела сред  $L$ ;  $E_y, H_x$  – тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  соответственно.

Введем следующие обозначения для рассматриваемых обратных задач:  $P$  – обратная задача восстановления характеристик диафрагмы по значениям коэффициента прохождения  $F/A$ ,  $Q$  – обратная задача, в которой используются значения коэффициента отражения  $B/A$ . Неизвестные величины записаны в нижнем индексе, в верхнем – поле чисел, в котором разыскиваются искомые величины. Тогда постановка задач имеет вид.

**Постановка обратных задач  $P_{\hat{\mu}^{(j)}}$  ( $Q_{\hat{\mu}^{(j)}}$ ):** требуется по известным коэффициентам прохождения  $F/A$  (или коэффициентам отражения  $B/A$ ) электромагнитного поля, измеренным на различных частотах, определить диагональный тензор магнитной проницаемости  $\hat{\mu}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) каждой секции анизотропной многосекционной диафрагмы, помещенной в прямоугольный волновод.

## 2. Обратные задачи $P_{\hat{\mu}^{(j)}}$ и $Q_{\hat{\mu}^{(j)}}$

Математическая постановка задачи сводится к решению краевой задачи (1)–(7) для системы уравнений Максвелла. Из системы (4), равенств (6) и (7) имеем следующее выражение для постоянной распространения  $\gamma_j$ :

$$\gamma_j = \sqrt{\left(\omega^2 \varepsilon_{22}^{(j)} \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}\right) \mu_{11}^{(j)}} / \mu_0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

В работе [2] для тензоров (1), (2) были получены формулы зависимости коэффициента прохождения  $F/A$  от компонент диэлектрических и магнит-

ных тензоров и формула зависимости коэффициента отражения  $B/A$  от компонент диэлектрических и магнитных тензоров:

$$\frac{F}{A} = \frac{2e^{-i\gamma_0 l_n} \prod_{j=0}^n \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}}}{\frac{\gamma_n}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)} + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)}} \quad (9)$$

и

$$\frac{B}{A} = \frac{\left( \frac{\gamma_n}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(-)} + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(-)} \right)}{\left( \frac{\gamma_n}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)} + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)} \right)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 = 1, p_2^{(\pm)} &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_1 \cos \alpha_j \pm \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_1 i \sin \alpha_j, \\ p_{j+1}^{(\pm)} &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j^{(\pm)} \cos \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j^{(\pm)} i \sin \alpha_j, \\ q_1 = 1, q_2 &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_1 i \sin \alpha_j \pm \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_1 \cos \alpha_j, \\ q_{j+1}^{(\pm)} &= \frac{\gamma_{j-1}}{\mu_{11}^{(j-1)}} p_j^{(\pm)} i \sin \alpha_j + \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} q_j^{(\pm)} \cos \alpha_j, \\ \alpha_j &= \gamma_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Каждое из уравнений (9) и (10) представляет собой комплексное нелинейное уравнение с  $n$  неизвестными  $\mu_{11}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Из уравнения (9) при  $k$  ( $k = n/2$ , если  $n$  – четно,  $k = n/2 + 1$ , если  $n$  – нечетно) на различных частотах  $\omega_m$  ( $m = 1, \dots, k$ ) получаем систему нелинейных уравнений:

$$\frac{F(\omega_m)}{A} = \frac{2e^{-i\gamma_0(\omega_m)l_n} \prod_{j=0}^n \frac{\gamma_j(\omega_m)}{\mu_{11}^{(j)}}}{\frac{\gamma_n(\omega_m)}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)}(\omega_m) + \frac{\gamma_0}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)}(\omega_m)} \quad (m = 1, \dots, k), \quad (12)$$

решая которую методом Левенберга – Марквардта, находим неизвестные  $\mu_{11}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Для того чтобы найти остальные компоненты диагонального тензора  $\mu_{22}^{(j)}$  ( $j=1, \dots, n$ ), будем применять так называемый метод «поворота диафрагмы», предложенный в работе [3], суть которого состоит в следующем. Пространственно ориентируя диафрагму в волноводе, найдем такое положение диафрагмы, при котором изменятся положения компонент тензоров на главной диагонали, а именно необходимо найти такой поворот диафрагмы, при котором компоненты  $\mu_{11}^{(j)}$  и  $\mu_{22}^{(j)}$  ( $j=1, \dots, n$ ) поменялись бы местами. Это поворот относительно оси  $Oz$  на угол  $\varphi = \pi/2$ , которому соответствует матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В результате поворота тензор магнитной проницаемости примет вид

$$\tilde{\mu}^{(j)} = A_1^{-1} \mu^{(j)} A_1 \quad \tilde{\mu}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mu_{22}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}.$$

Тензор диэлектрической проницаемости преобразуется так же. Тогда для новых тензоров выражение для постоянной распространения  $\tilde{\gamma}_j$  каждой секции многосекционной диафрагмы примет вид

$$\tilde{\gamma}_j = \sqrt{\left( \omega^2 \epsilon_{22}^{(j)} \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \mu_{22}^{(j)} / \mu_0}, \quad j=1, \dots, n. \quad (14)$$

Проводя аналогичные рассуждения, как и для тензоров в исходном положении диафрагмы, окончательно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{A} &= \frac{2e^{-i\tilde{\gamma}_0(\omega_m)l_n} \prod_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j(\omega_m)}{\mu_{22}^{(j)}} \quad (m=1, \dots, n), \\ \tilde{p}_1 &= 1, \tilde{p}_2^{(\pm)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} p_1 \cos \tilde{\alpha}_j \pm \frac{\tilde{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} q_1 i \sin \tilde{\alpha}_j, \\ \tilde{p}_{j+1}^{(\pm)} &= \frac{\tilde{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} \tilde{p}_j^{(\pm)} \cos \tilde{\alpha}_j + \frac{\tilde{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} \tilde{q}_j^{(\pm)} i \sin \tilde{\alpha}_j, \\ q_1 &= 1, \tilde{q}_2^{(\pm)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} p_1 i \sin \tilde{\alpha}_j \pm \frac{\tilde{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} q_1 \cos \tilde{\alpha}_j, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{q}_{j+1}^{(\pm)} = \frac{\tilde{\gamma}_{j-1}}{\mu_{22}^{(j-1)}} \tilde{p}_j^{(\pm)} i \sin \tilde{\alpha}_j + \frac{\tilde{\gamma}_j}{\mu_{22}^{(j)}} \tilde{q}_j^{(\pm)} \cos \tilde{\alpha}_j,$$

$$\tilde{\alpha}_j = \tilde{\gamma}_j (l_j - l_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (16)$$

решая которую методом Левенберга – Марквардта, находим неизвестные компоненты  $\mu_{22}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Проводя аналогичные рассуждения для коэффициента отражения, получим, что решение обратной задачи  $Q_{\mu^{(j)}}$  сводится к системам:

$$\frac{B(\omega_m)}{A} = \frac{\frac{\gamma_n(\omega_m)}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(-)}(\omega_m) + \frac{\gamma_0(\omega_m)}{\mu_0} q_{n+1}^{(-)}(\omega_m)}{\frac{\gamma_n(\omega_m)}{\mu_{11}^{(n)}} p_{n+1}^{(+)}(\omega_m) + \frac{\gamma_0(\omega_m)}{\mu_0} q_{n+1}^{(+)}(\omega_m)}, \quad (17)$$

$$\frac{\tilde{B}(\omega_m)}{A} = \frac{\frac{\tilde{\gamma}_n(\omega_m)}{\mu_{11}^{(n)}} \tilde{p}_{n+1}^{(-)}(\omega_m) + \frac{\tilde{\gamma}_0(\omega_m)}{\mu_0} \tilde{q}_{n+1}^{(-)}(\omega_m)}{\frac{\tilde{\gamma}_n(\omega_m)}{\mu_{11}^{(n)}} \tilde{p}_{n+1}^{(+)}(\omega_m) + \frac{\tilde{\gamma}_0(\omega_m)}{\mu_0} \tilde{q}_{n+1}^{(+)}(\omega_m)} \quad (m = 1, \dots, k), \quad (18)$$

решая которые методом Левенберга – Марквардта, находим неизвестные  $\mu_{11}^{(j)}$  и  $\mu_{22}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) искомого тензора.

### 3. Численные результаты

Разработанные в разд. 2 численные методы решения обратных задач были реализованы в виде комплекса программ. В табл. 1 представлены численные результаты решения обратной задачи  $P_{\varepsilon_j, l_j}$ . Все единицы измерения указаны в системе СГС.

Параметры волновода:  $a = 2,286$  см,  $b = 1$  см; измерения проводятся на частоте  $f = 11,93$  ГГц,  $f = 8,12$ , амплитуда падающего поля  $A = 1$ , толщина каждой секции  $l_j - l_{j-1} = 0,5$ . Тензоры диэлектрической проницаемости каждой секции известны:

$$\hat{\varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^{(2)} = \begin{pmatrix} 11,6 & 0 & 0 \\ 0 & 9,4 & 0 \\ 0 & 0 & 9,4 \end{pmatrix},$$

В первом столбце табл. 1 указаны значения коэффициента прохождения на каждой частоте при исходном положении диафрагмы и после поворота, во втором – вычисленные значения тензора магнитной проницаемости каждой секции двухсекционной диафрагмы, в последнем столбце указаны точные значения искомых величин.

Таблица 1

Значения $\frac{F^{(1)}(\omega_1)}{A}, \frac{F^{(1)}(\omega_2)}{A}$ $\frac{F^{(2)}(\omega_1)}{A}, \frac{F^{(2)}(\omega_2)}{A}$	Вычисленные $\mu_{11}^{(1)} \mu_{22}^{(1)}, \mu_{11}^{(2)} \mu_{22}^{(2)}$	Точные $\mu_{11}^{(1)} \mu_{22}^{(1)}, \mu_{11}^{(2)} \mu_{22}^{(2)}$
$0,272 + 0,457i;$ $0,090 - 0,179i;$ $0,326 + 0,353i;$ $0,170 - 0,137i$	$\hat{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.206 & 0 & 0 \\ 0 & 1.989 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $\hat{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.26 & 0 & 0 \\ 0 & 3.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\hat{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $\hat{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.27 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$0,516 + 0,817i;$ $0,785 - 0,205i;$ $0,497 + 0,561i;$ $-0,372 - 0,775i;$	$\hat{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.99996 & 0 & 0 \\ 0 & 5.00001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $\hat{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 12.0022 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\hat{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $\hat{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Из табл. 1 видно, что относительная погрешность вычислений не превышает 5 %, что говорит об эффективности разработанного метода.

### Заключение

Разработан численный метод решения обратной задачи восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения. Метод реализован в виде комплекса программ, протестирован на тестовых задачах. В статье представлены численные результаты решения обратной задачи для двухсекционной диафрагмы, относительная погрешность вычислений не превышает 5 %. Предложенный метод может применяться для определения электромагнитных характеристик анизотропных материалов.

### Список литературы

1. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
2. **Медведик, М. Ю.** Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 76 с.
3. **Деревянчук, Е. Д.** Решение обратной задачи определения тензора магнитной проницаемости диафрагмы в прямоугольном волноводе / Е. Д. Деревянчук // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 1 (25). – С. 34–44.
4. **Derevyanchuk, E. D.** Tensor permittivity reconstruction of two-sectional diaphragm in a rectangular waveguide / E. D. Derevyanchuk, Yu. G. Smirnov // Days on

Diffraction : Proceedings of the International Conference (St. Petersburg, Russia, 2014). – St. Petersburg, 2014 – P. 65–68.

5. **Smirnov, Yu. G.** Permittivity reconstruction of layered dielectrics in a rectangular waveguide from the transmission coefficient at different frequencies / Yu. G. Smirnov, Yu.V. Shestopalov and E. D. Derevyanchuk // *Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series : Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2013. – Vol. 52. – P. 169–181.

### **References**

1. Il'inskiy A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical models of electrodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1991, 224 p.
2. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Obratnye zadachi vosstanovleniya dielektricheskoy pronitsaemosti neodnorodnogo tela v volnovode* [Inverse problems of dielectric permeability reconstruction of a heterogeneous body in a waveguide]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, 76 p.
3. Derevyanchuk E. D. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 1 (25), pp. 34–44.
4. Derevyanchuk E. D., Smirnov Yu. G. *Days on Diffraction: Proceedings of the International Conference (St. Petersburg, Russia, 2014)*. Saint-Petersburg, 2014, pp. 65–68.
5. Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V. and Derevyanchuk E. D. *Inverse Problems and Large-Scale Computations, Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2013, vol. 52, pp. 169–181.

---

**Деревянчук Екатерина Дмитриевна**  
лаборант-исследователь, Научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

---

**Derevyanchuk Ekaterina Dmitrievna**  
Research-laboratory assistant, Research Center “Supercomputer modeling in electrodynamics”, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

---

УДК 517.958, 537.876.46

**Деревянчук, Е. Д.**

**Обратная задача восстановления тензора магнитной проницаемости многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения** / Е. Д. Деревянчук // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2015. – № 4 (36). – С. 84–92.

УДК 538.9

*П. Б. Болдыревский, А. Г. Коровин,  
С. А. Денисов, С. П. Светлов, В. Г. Шенгуров*

## **АНАЛИЗ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ТОЛЩИНЫ ЭПИТАКСИАЛЬНОГО СЛОЯ КРЕМНИЯ ПРИ ОСАЖДЕНИИ ИЗ СУБЛИМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ В ВАКУУМЕ <sup>1</sup>**

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Выращиваемые методом сублимационной молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ) слои Si однородны по толщине на небольшой площади (1–4 см<sup>2</sup>). Поэтому для дальнейшего развития и промышленного использования данного метода необходима реализация эпитаксиального роста на подложках достаточно большой площади. Целью данной работы являлось выявление условий осаждения слоев кремния с однородным распределением толщины по площади подложки диаметром 100–200 мм из сублимационных источников.

*Материалы и методы.* Для повышения степени однородности толщин эпитаксиальных слоев Si, осаждаемых в процессе сублимационной МЛЭ, рассматривается возможность применения нескольких идентичных источников Si. Сублимационный источник Si представляет собой прямоугольный брусок сечением 4×4 мм и длиной 120 мм, нагреваемый до рабочей температуры. Предложенная модель расчета распределения толщины эпитаксиального слоя Si основывается на том, что линейная плотность распределения частиц Si у поверхности подложки имеет вид, близкий к нормальному закону распределения.

*Результаты.* Получены экспериментальные и расчетные профили распределения толщины эпитаксиальных слоев кремния вдоль диаметра подложки. Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с экспериментом. Показана возможность получения однородных слоев кремния при одновременном использовании трех сублимационных источников.

*Выводы.* Для получения заданной степени однородности эпитаксиального слоя необходимо применение системы нескольких сублимационных источников. В случае применения трех сублимационных источников определены геометрические и конструкционные параметры взаимного расположения подложки и сублимационных источников в вакуумной камере.

**Ключевые слова:** молекулярно-лучевая эпитаксия, сублимационный источник, однородность по толщине эпитаксиальных слоев кремния

*P. B. Boldyrevskiy, A. G. Korovin,  
S. A. Denisov, S. P. Svetlov, V. G. Shengurov*

## **ANALYSIS OF THICKNESS UNEVENNESS OF THE EPITAXIAL SILICON LAYER DURING DEPOSITION FROM SUBLIMATION SOURCES IN A VACUUM**

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки РФ 2014/134 (проект № 3423), а также поддержана грантом Президента РФ (МК-7021.2015.2).

**Abstract.**

*Background.* Si layers, grown by sublimation molecular-beam epitaxy (MBE), are uniform in thickness on a small area (1-4 cm<sup>2</sup>). Therefore, for further development and industrial use of this method it is necessary to realize epitaxial growth on substrates of sufficiently large area. The aim of this work is to identify conditions of deposition of silicon layers with uniform thickness distribution over the area of a substrate with a diameter of 100–200 mm from sublimation sources.

*Materials and methods.* In order to increase thickness uniformity of epitaxial Si layers, deposited in the process of sublimation MBE, the possibility of using several identical source Si was observed. A sublimation Si source is a rectangular bar with cross-section of 4x4 mm and the length of 120 mm, heated to the working temperature. The proposed model for calculation of thickness distribution of the epitaxial Si layer is based on the fact that the linear density of distribution of Si particles at the surface of a substrate has a form close to the normal distribution law.

*Results.* The authors obtained the experimental and calculated profiles of thickness distribution of epitaxial silicon layers along with the substrate diameter. The calculation results agree well with the experiment. The possibility of obtaining uniform layers of silicon while using three sources of sublimation is showed.

*Conclusions.* In order to obtain the desired degree of uniformity of the epitaxial layer, it is necessary to use several sources of sublimation. For the case of three sublimation sources the authors identified geometric and structural parameters of the mutual arrangement of a substrate and the sublimation sources in a vacuum chamber.

**Key words:** molecular beam epitaxy, sublimation source, thickness uniformity of epitaxial silicon layers

**Введение**

Молекулярно-лучевая эпитаксия (МЛЭ) кремния активно исследуется в связи с возможностью роста низкоразмерных структур и получения резкого профиля распределения легирующей примеси на границе слоев без перемешивания благодаря низкотемпературному процессу [1]. Для получения молекулярных потоков можно использовать сублимацию при нагреве пластины кремния проходящим током до высоких температур (~1380 °C). Пары Si из сублимационного монокристалла состоят в основном из одиночных атомов и полностью свободны от микрокапель и кластеров, в отличие от потока паров Si, создаваемого электронно-лучевым нагревом. Использование сублимации позволяет получать совершенные по структуре эпитаксиальные слои Si при достаточно низких температурах (~500 °C) в широком интервале скоростей роста (до 30 нм/мин) [2]. Сублимация позволяет выращивать и легированные слои, применяя в качестве источника монокристалл, легированный заданной примесью. При нагреве такого источника кремний сублимирует вместе с соответствующей долей примеси. Одним из важных параметров эпитаксиальных структур, определяющим возможность промышленного использования, является осаждение слоев с однородным распределением толщины и уровня легирования на подложках большой площади. Однако в большинстве установок, использующих сублимационные источники кремния, применяются подложки кремния нестандартной формы (в виде полосок) малых размеров, пригодные только для исследовательских целей.

Целью данной работы являлось выявление условий осаждения слоев кремния с однородным распределением толщины по площади подложки диаметром 100–200 мм из сублимационных источников.

### 1. Экспериментальная часть

Эпитаксиальный рост слоев кремния осуществлялся с использованием технологической установки, описанной в работах [3, 4], при температуре подложки  $500\text{ }^{\circ}\text{C}$  и давлении остаточных газов в вакуумной камере  $\sim 10^{-8}$  Торр. В качестве подложек использовались стандартные подложки кремния с кристаллографической ориентацией (100) диаметром 100 мм.

Сублимационный источник Si представлял собой прямоугольный брусок сечением  $4\times 4$  мм и длиной 120 мм, вырезанный из слитка монокристаллического кремния. Нагрев источника до рабочих температур осуществлялся пропусканием через него постоянного электрического тока силой 40–50 А.

В процессе эпитаксии температура сублимационного источника достигала  $1380\text{ }^{\circ}\text{C}$ , после чего открывался экран, отделяющий источник от подложки и проводилось осаждение слоя кремния. Схема расположения источника и подложки в вакуумной камере представлена на рис. 1.

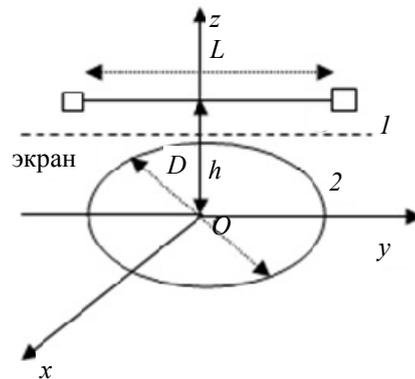


Рис. 1. Взаимное расположение сублимационного источника Si (1) и подложки (2) в вакуумной камере

Одной из основных технологических задач сублимационной МЛЭ является получение монокристаллических структур с минимальным разбросом толщин слоев по площади структуры, что особенно важно при использовании стандартных монокристаллических подложек кремния (дисков) достаточно большого диаметра (100–200 мм). Показано [5, 6], что один сублимационный источник обеспечивает необходимую однородность толщин эпитаксиальных слоев кремния (разброс толщин не превышает 10 нм) на площади не более  $20\times 100$  мм и распределение значений толщин в плоскости, перпендикулярной линии источника соответствует неоднородному распределению плотности частиц ростового вещества в сечении молекулярного пучка (диаметр подложки 100 мм; расстояние между источником и подложкой 20 мм). На рис. 2 представлены экспериментальные профили распределения толщин эпитаксиального слоя кремния, выращенного при центральном (вдоль диаметра подложки) расположении источника (рис. 2,а), а также при использовании двух идентичных сублимационных источников (рис. 2,б). Экспериментальные профили распределения толщин слоев кремния получали с помощью системы Talysurf CCI 2000 (интерферометр белого цвета). Погрешность измерений не превышала  $\pm 1,0$  нм.

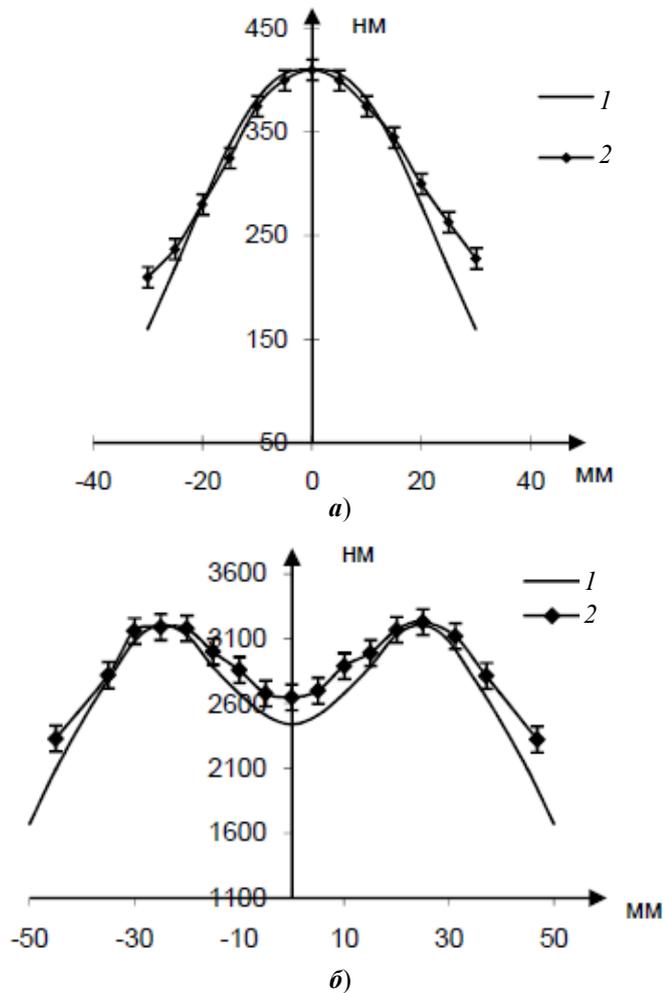


Рис. 2. Теоретические (1) и экспериментальные (2) профили распределения толщины слоев кремния вдоль диаметра подложки: *a* – центральный сублимационный источник; *б* – два источника

По данным электронографии и рентгеновской дифракции эпитаксиальные слои кремния имели монокристаллическую структуру при максимальной толщине (максимальной скорости роста 0,3 нм/с), что позволяет считать в данных условиях нелимитирующими поверхностные процессы упорядочивания и встраивания частиц. Вид профиля распределения скорости эпитаксиального роста будет соответствовать рис. 2 при условии ее стационарности.

## 2. Расчеты и обсуждение результатов

Для проведения необходимых расчетов параметров сублимационной МЛЭ будем использовать следующие положения и условия: сублимационный источник кремния считаем нитевидным ( $L \gg a$ ,  $L$  – длина источника,  $a$  – ширина сублимирующей поверхности); он расположен параллельно диаметру подложки  $D$  вдоль оси  $OY$ . Для уменьшения краевых эффектов полагаем  $L > D$  (в условиях эксперимента 120 и 100 мм соответственно). Расстояние между источником и подложкой –  $h$  (рис. 1). Приближение нитевидного ис-

точника позволяет рассматривать одномерные задачи, выделяя необходимое сечение молекулярного пучка.

Коэффициент конденсации, определяющий долю частиц молекулярного пучка, осаждающихся на растущей поверхности, будем считать близким к единице, что соответствует экспериментальным данным для указанной температуры подложки. Однородность распределения толщины эпитаксиальных слоев по оси  $OY$ , соответствующая требованиям технологических процессов микро- и нанoeлектроники, достигается выполнением условия  $L > D$  и плоскопараллельностью источника и подложки.

Исходя из анализа экспериментальных данных (рис. 2), можно предположить, что линейная плотность распределения частиц ростового вещества в диаметральном сечении молекулярного пучка, перпендикулярном линии источника, у поверхности подложки (ось  $OX$ ) имеет вид, близкий к нормальному закону распределения.

Сопоставляя выражения для плотности вероятности распределений Гаусса и Коши при максимальном значении их ординат, получим зависимость среднего квадратического отклонения  $\sigma$  от расстояния  $h$  между сублимационным источником и подложкой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h. \quad (1)$$

Тогда с учетом (1) для расчета численными методами распределение толщины осажденного слоя может быть использовано выражение

$$H_0(x_i) = \frac{kt}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{x_i/(\sqrt{\pi/2}h)} e^{-u^2/2} du - \int_0^{x_{i-1}/(\sqrt{\pi/2}h)} e^{-u^2/2} du \right], \quad (2)$$

где  $x_i = i \frac{D}{2n}$  ( $i = 1; 2; \dots; n$ ;  $n$  – число точек деления промежутка интегрирования  $[0; D/2]$ ),  $k$  – размерный коэффициент, характеризующий параметры сублимационного источника;  $t$  – время осаждения.

Теоретические профили распределений толщин эпитаксиальных слоев приведены на рис. 2 (кривые 1). В случае применения двух источников расчеты проводились с использованием формулы (2) с учетом симметричного смещения линии каждого источника от центра подложки. Толщина слоя, осажденного на подложке, определяется суперпозицией одновременного воздействия двух источников. Результаты, представленные на рис. 2, показывают достаточно хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных.

Для повышения степени однородности толщин эпитаксиальных слоев, осаждаемых в процессе сублимационной МЛЭ рассмотрим возможности применения трех идентичных (с равными  $k$ , соответствующими температуре сублимации 1380 °С) источников, один из которых является центральным. Сублимационные источники расположены параллельно друг другу и плоскости подложки, вдоль оси  $OY$ .

В этом случае распределение толщины слоя осаждаемого вещества в зоне роста при сублимации из трех источников будет описываться выражением

$$H(x_i) = ktn \left[ \int_0^{x_i} \Phi(x) dx - \int_0^{x_{i-1}} \Phi(x) dx \right]. \quad (3)$$

Разность в квадратных скобках (3) описывает вероятность попадания частицы осаждаемого вещества в заданный интервал;

$$\Phi(x_i) = \frac{1}{3\pi} \left[ \frac{1}{h_0} e^{-\frac{x^2}{\pi h_0^2}} + \frac{1}{h} \left( e^{-\frac{(x+\Delta)^2}{\pi h^2}} + e^{-\frac{(x-\Delta)^2}{\pi h^2}} \right) \right] - \quad (4)$$

плотность вероятности распределения числа частиц в диаметральной сечении молекулярного пучка, формируемого тремя источниками;  $h_0, h$  – расстояния между центральным и боковыми источниками и подложкой соответственно;  $\Delta$  – расстояние между источниками.

Для достижения необходимой однородности толщин эпитаксиальных слоев требуется оптимизация соответствующих параметров: расстояния между источниками  $\Delta$  и расстояния  $h$  от источника до подложки (зоны осаждения), варьирование которых проводилось в среде Mathcad 15. Графические результаты численных расчетов распределений толщин эпитаксиальных слоев кремния, полученные с использованием выражений (3) и (4), представлены на рис. 3.

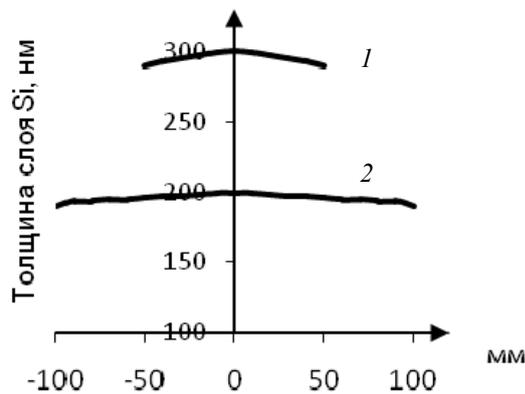


Рис. 3. Расчетные профили распределений толщин эпитаксиальных слоев кремния вдоль диаметра подложки для трех сублимационных источников ( $k = 2 \cdot 10^{-5}$  нм/с,  $t = 1800$  с): 1 –  $D = 100$  мм, 2 –  $D = 200$  мм

Максимальная степень однородности теоретических профилей распределений толщин слоев (разброс значений толщин не превышает 10 нм) достигается при следующих значениях параметров, характеризующих относительное расположение сублимационных источников и подложки в вакуумной камере: для подложек диаметром 100 мм:  $h_0 = 50$  мм,  $h = 30$  мм,  $\Delta = 45$  мм (рис. 3, кривая 1); для подложек диаметром 200 мм:  $h_0 = 52$  мм,  $h = 50$  мм,  $\Delta = 117$  мм (рис. 3, кривая 2). Таким образом, применение системы трех суб-

лимационных источников при соответствующей оптимизации параметров, характеризующих их расположение в вакуумной камере, является достаточно эффективным способом достижения необходимой степени однородности эпитаксиальных слоев кремния.

### Список литературы

1. **Kasper, E.** Surface segregation determination by epitaxy temperature steps / E. Kasper, M. Oehme // *Appl. Phys. Lett.* – 1990. – Vol. 76. – P. 3573–3575.
2. **Кузнецов, В. П.** Метод сублимационной молекулярно-лучевой эпитаксии структур на основе кремния / В. П. Кузнецов, З. Ф. Красильник // *Физика и техника полупроводников.* – 2010. – Т. 44, № 3. – С. 413–417.
3. Установка для сублимационной молекулярно-лучевой эпитаксии кремния / С. П. Светлов, В. Г. Шенгуров, В. А. Толомасов, Г. Н. Горшенин, В. Ю. Чалков // *Приборы и техника эксперимента.* – 2001. – № 5. – С. 137–140.
4. Установка и вакуумный метод эпитаксиального выращивания многослойных структур, содержащих слои Si, Ge и SiGe / В. Г. Шенгуров, В. Ю. Чалков, С. А. Денисов, С. П. Светлов, Д. В. Шенгуров // *Вакуумная техника и технология.* – 2011. – Т. 21, № 1. – С. 45–48.
5. **Mooney, P. M.** SiGe MOSFET structures on silicon-on-sapphire substrates grown by ultra-high vacuum chemical vapor deposition / P. M. Mooney, J. O. Chu, J. A. Ott // *J. Electron. Materials.* – 2000. – Vol. 29. – P. 921–927.
6. Расчет однородности толщин эпитаксиальных слоев, полученных методом молекулярно-лучевой эпитаксии из сублимационного источника / П. Б. Болдыревский, А. Г. Коровин, С. А. Денисов, С. П. Светлов, В. Г. Шенгуров // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского.* – 2014. – № 2 (1). – С. 72–74.

### References

1. Kasper E., Oehme M. *Appl. Phys. Lett.* 1990, vol. 76, pp. 3573–3575.
2. Kuznetsov V. P., Krasil'nik Z. F. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductor physics and technology]. 2010, vol. 44, no. 3, pp. 413–417.
3. Svetlov S. P., Shengurov V. G., Tolomasov V. A., Gorshenin G. N., Chalkov V. Yu. *Pribory i tekhnika eksperimenta* [Experimental equipment and technology]. 2001, no. 5, pp. 137–140.
4. Shengurov V. G., Chalkov V. Yu., Denisov S. A., Svetlov S. P., Shengurov D. V. *Vakuumnaya tekhnika i tekhnologiya* [Vacuum equipment and technology]. 2011, vol. 21, no. 1, pp. 45–48.
5. Mooney P. M., Chu J. O., Ott J. A. *J. Electron. Materials.* 2000, vol. 29, pp. 921–927.
6. Boldyrevskiy P. B., Korovin A. G., Denisov S. A., Svetlov S. P., Shengurov V. G. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo* [Bulletin of LObachevsky State University of Nizhny Novgorod]. 2014, no. 2 (1), pp. 72–74.

#### **Болдыревский Павел Борисович**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математических и естественных  
дисциплин, Нижегородский  
государственный университет  
имени Н. И. Лобачевского (Россия,  
г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: bpavel2@rambler.ru

#### **Boldyrevskiy Pavel Borisovich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of mathematical and natural subjects,  
Lobachevsky State University of Nizhny  
Novgorod (23 Gagarina avenue,  
Nizhny Novgorod, Russia)

***Коровин Анатолий Геннадьевич***

кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических и естественных дисциплин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского (Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: [bpavel2@rambler.ru](mailto:bpavel2@rambler.ru)

***Korovin Anatoliy Gennad'evich***

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematical and natural subjects, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, Russia)

***Денисов Сергей Александрович***

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского (Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: [denisov@nifti.unn.ru](mailto:denisov@nifti.unn.ru)

***Denisov Sergey Aleksandrovich***

Candidate of physical and mathematical sciences, researcher, Research Institute of Applied Physics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, Russia)

***Светлов Сергей Петрович***

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского (Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: [denisov@nifti.unn.ru](mailto:denisov@nifti.unn.ru)

***Svetlov Sergey Petrovich***

Candidate of physical and mathematical sciences, senior staff scientist, Research Institute of Applied Physics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, Russia)

***Шенгуров Владимир Геннадьевич***

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией электроники твердого тела, Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского (Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: [denisov@nifti.unn.ru](mailto:denisov@nifti.unn.ru)

***Shengurov Vladimir Gennad'evich***

Doctor of physical and mathematical sciences, head of solid state electronics laboratory, Research Institute of Applied Physics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, Russia)

---

УДК 538.9

**Анализ неравномерности толщины эпитаксиального слоя кремния при осаждении из сублимационных источников в вакууме / П. Б. Болдыревский, А. Г. Коровин, С. А. Денисов, С. П. Светлов, В. Г. Шенгуров // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 93–100.**

*К. Н. Нищев, М. И. Новопольцев,  
В. И. Беглов, М. А. Окин, Е. Н. Лютова*

## **ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СЛОЕВ МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОЙ ВСПЫШКИ<sup>1</sup>**

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Одной из ключевых задач силовой электроники является обеспечение эффективного теплоотвода в силовых полупроводниковых приборах (СПП). Эффективность теплоотвода в СПП существенно зависит от теплопроводности тонких металлических слоев, входящих в состав межэлементных соединений прибора. Целью исследования является разработка методики измерения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев, применяемых в технологиях производства СПП, методом лазерной вспышки с использованием стандартной аппаратуры.

*Материалы и методы.* Метод лазерной вспышки (метод Паркера) использовался для измерения коэффициента температуропроводности тонких слоев меди и алюминия, а также тонких спеченных слоев серебросодержащей пасты.

*Результаты.* Предложена методика измерения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев методом лазерной вспышки, основанная на формировании в исследуемых слоях радиальных тепловых потоков, направленных от периферии к центру образца. Проведено математическое моделирование процессов теплопереноса в данной геометрии. С использованием установки LFA 427 (NETZSCH) определены коэффициенты температуропроводности исследуемых тонких металлических слоев.

*Выводы.* Из полученных результатов следует, что для корректного измерения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев методом лазерной вспышки, в отличие от стандартного метода Паркера, необходимо в исследуемых слоях формировать радиальные тепловые потоки, направленные к центру образца. Корректность предложенной методики подтверждена соответствием результатов измерений коэффициента температуропроводности тонких образцов меди и алюминия табличным данным. Определен коэффициент температуропроводности тонких спеченных слоев серебросодержащей пасты, применяемых в межэлементных соединениях СПП.

**Ключевые слова:** силовые полупроводниковые приборы, тонкие металлические слои, теплопроводность, температуропроводность, метод лазерной вспышки.

*К. N. Nishchev, M. I. Novopol'tsev,  
V. I. Beglov, M. A. Okin, E. N. Lyutova*

## **MEASUREMENT OF TEMPERATURE CONDUCTIVITY OF THIN METAL LAYERS BY LASER FLASH METHOD**

<sup>1</sup> Работа выполнена в Мордовском государственном университете им. Н. П. Огарева в рамках договора № 02.G25.31.0051 между ОАО «Электровыпрямитель» и Министерством образования и науки Российской Федерации об условиях предоставления и использования субсидии на реализацию комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием российского высшего учебного заведения.

**Abstract.**

*Background.* One of the key targets of power electronics is to provide an efficient heat removal in power semiconductor devices (PSD). The heat removal efficiency in PSD is significantly dependent on thermal conductivity of thin metal layers that are part of inter-cell connections of a device. Concerning this, it is of great significance to find methods of accurate measuring of temperature conductivity in these layers. The aim of the study is to develop a method of measuring temperature conductivity of thin metal layers in PSD production technologies, based on the laser flash method with the use of regular equipment.

*Materials and methods.* The laser flash method (Parker method) was used to measure the temperature conductivity of copper and aluminum thin layers and, then, thin sintered layers of silver paste as well.

*Results.* The paper describes the procedure of measuring by the laser flash method; the procedure is based on radial heat flows formed in thin metal layers that extend from the periphery to the centre of the sample. Mathematical modeling of heat transfer processes is presented. Using the setup LFA 427 (NETZSCH) the authors have determined coefficients of temperature conductivity of thin metal layers.

*Conclusions.* The findings show that for accurate measurement of temperature conductivity in thin metal layers using a laser flash, unlike the standard Parker method, it is necessary to generate radial heat flows that extend to the centre of the sample in those layers. The reliability of the proposed methodology is proven by conformity of temperature conductivity results, obtained from measuring copper and aluminum samples, to look-up tables. The temperature conductivity of a thin sintered layer of silver paste, used in inter-cell connections of PSD, is calculated.

**Key words:** power semiconductor devices, thin metal layers, thermal conductivity, temperature conductivity, laser flash.

**Введение**

Одной из важнейших проблем силовой электроники является обеспечение эффективного теплоотвода в силовых полупроводниковых приборах (СПП) [1, 2]. Традиционный способ решения проблемы заключается в создании надежного, механически прочного и обладающего высокой теплопроводностью соединения электрически активной полупроводниковой структуры с теплоотводящей металлической подложкой. Эффективность теплоотвода в СПП зависит не только от теплопроводности подложки, но и от величины теплового сопротивления соединения полупроводниковой структуры с теплоотводящей подложкой.

При изготовлении мощных СПП наряду с традиционной технологией сплавления функциональных элементов с использованием высокотемпературных припоев [3] используется технология низкотемпературного спекания тонких слоев серебросодержащих паст (Low-Temperature Joint Technique – LTJT) [4–6]. Спеченные соединительные слои серебросодержащей пасты (СП) при их малой толщине (~ 20–100 мкм) обладают высокой теплопроводностью [7], сравнимой с теплопроводностью массивного серебра (418 Вт/м·К [8]). Теплопроводность таких слоев не может быть точно определена с использованием стандартных методик. Поэтому актуальной задачей является разработка специальной методики определения теплопроводности тонких слоев материалов, используемых в технологии LTJT.

## 1. Определение температуропроводности материалов методом Паркера

Одним из наиболее распространенных в практике методов измерения температуропроводности материалов является метод Паркера [9]. С использованием аналитического решения задачи теплопроводности для плоского цилиндрического образца, фронтальная сторона которого облучается коротким лазерным импульсом, в предположении полного поглощения его энергии в тонком поверхностном слое, в [9] получено соотношение для определения коэффициента температуропроводности образца:

$$\alpha = \frac{1,37l^2}{\pi^2 \tau_{1/2}}, \quad (1)$$

где  $l$  – толщина образца;  $\tau_{1/2}$  – время достижения половинного значения максимальной температуры кривой нагрева (зависимости температуры тыльной стороны образца от времени с момента лазерной вспышки). При этом предполагается, что длительность облучающего импульса мала, а тепловые потери отсутствуют. Установлено [10, 11], что пренебрежение тепловыми потерями приводит к завышенным значениям коэффициента температуропроводности, особенно при высоких температурах. Наиболее точный учет тепловых потерь возможен путем решения нестационарного уравнения теплопроводности.

Использование метода Паркера для определения коэффициента температуропроводности тонких слоев материалов, обладающих высокой теплопроводностью, имеет ряд особенностей. С уменьшением толщины образца и увеличением его теплопроводности время достижения максимальной температуры тыльной стороны образца может быть сравнимым с длительностью лазерного импульса, существенно искажая экспериментальную кривую нагрева [12]. Поэтому для повышения точности измерений в экспериментах с тонкими слоями необходимо использовать сверхкороткие тепловые импульсы и быстродействующую аппаратуру для регистрации температуры тыльной поверхности образца. Анализ факторов, влияющих на форму кривых нагрева и методика учета этих факторов, приведен в [13].

Следует также отметить, что вследствие квадратичной зависимости в формуле (1)  $\alpha$  от  $l$  неточность определения толщины исследуемого образца вносит значительный вклад в погрешность измерения коэффициента температуропроводности методом Паркера, достигая для тонких образцов десятка процентов.

Анализ литературных данных показывает, что использование стандартного метода Паркера для тонких образцов с высокой теплопроводностью приводит к значительным погрешностям в определении коэффициента температуропроводности, для минимизации которых необходима модификация не только методики измерения, но и процедуры обработки экспериментальной кривой нагрева.

## 2. Модификация метода Паркера

Для определения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев в стандартную методику Паркера нами были внесены из-

менения. Для увеличения «эффективной» толщины исследуемого тонкого образца в форме диска тепловые потоки от фронтальной поверхности, облучаемой лазерной вспышкой, к его тыльной поверхности направлялись в радиальном направлении в плоскости образца от периферии к его центру.

Для этого фронтальная и тыльная поверхности исследуемого образца закрывались непрозрачными экранами специальной формы (рис. 1). Экран 1 формировал кольцевую зону на периферии образца, облучаемую лазерным импульсом. Экран 2 позволял выделить область тыльной поверхности образца 3, температура которой регистрировалась ИК-детектором. Диаметр экрана 1 превышал диаметр отверстия в экране 2.

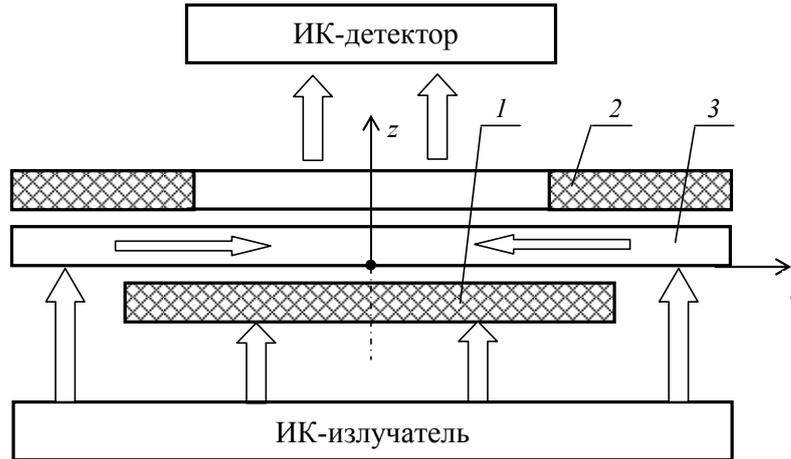


Рис. 1. Схема методики определения температуропроводности тонких металлических слоев

Регистрация кривой нагрева только центральной части образца позволяет отказаться от фокусирующей линзы, что значительно упрощает конструкцию прибора.

### 3. Математическое моделирование эксперимента

Физическую модель модернизированного метода Паркера измерения температуропроводности, схема которого представлена на рис. 1, можно описать следующим образом. Цилиндрический тонкий металлический образец радиусом  $r_0$  и толщиной  $l \ll r_0$  с коэффициентом температуропроводности  $\alpha$  расположен в вакууме между двумя экранами с зеркальными поверхностями. В начальный момент времени система находится в тепловом равновесии при температуре  $T_0$ . Нижняя периферийная кольцевая область образца с внутренним радиусом  $r_1 < r_0$  равномерно облучается импульсом ИК-излучения энергией  $Q$  и длительностью  $t_{\text{имп}}$ . Рассчитанное распределение плотности потока энергии с тыльной поверхности образца в его центральной области радиусом  $r_2 < r_1$  позволяет с использованием закона Стефана – Больцмана определить кривую нагрева (зависимость температуры, регистрируемой ИК-детектором, от времени), а затем величину  $\tau_{1/2}$ .

Для определения коэффициента температуропроводности образца в описанной выше физической модели необходимо решение нестационарного

уравнения теплопроводности. Точное аналитическое решение нестационарного уравнения теплопроводности для описанной физической модели представляет достаточно сложную задачу.

Поставленная задача была решена методом численного моделирования с использованием программного комплекса ANSYS. Расчеты выполнялись методом конечных элементов. Используемые при моделировании уравнение теплопроводности и краевые условия в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \alpha \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \text{ при } 0 < z < l, 0 < r < r_0, t > 0; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{Q}{t_{\text{имп}} \pi r_0^2} \vartheta(t_{\text{имп}} - t) \vartheta(r_0 - r) + \varepsilon_1 \sigma (T^4 - T_0^4) \text{ при } z = 0, r_1 < r < r_0; \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} &= \varepsilon_2 \sigma (T^4 - T_0^4) \text{ при } z = l, 0 < r < r_2; \\ T &= T_0 \text{ при } t = 0; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = 0, 0 < r < r_1; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = l, r_2 < r < r_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – степень черноты нижней, верхней и боковой поверхностей образца;  $\vartheta(t - t_{\text{имп}})$  и  $\vartheta(r_0 - r)$  – функции Хэвисайда.

#### 4. Результаты моделирования и их обсуждение

Математическое моделирование проводилось при следующих значениях характеристик физической модели. Радиус образца  $r_0 = 6,3$  мм; радиус экрана на фронтальной поверхности образца  $r_1 = 4$  мм; радиус отверстия в экране на тыльной поверхности образца  $r_2 = 3$  мм; степень черноты нижней и верхней поверхностей образца  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  принималась равной 0,95; энергия импульса  $Q = 10$  Дж; длительность ИК-импульса  $t_{\text{имп}} = 0,8$  мс;  $T_0 = 293$  К.

Из результатов математического моделирования (рис. 2,а) следует, что для тонких образцов, как и в формуле Паркера (1), коэффициент температуропроводности  $\alpha$  обратно пропорционален  $\tau_{1/2}$ :

$$\alpha = \frac{K}{\tau_{1/2}}, \quad (3)$$

где  $K$  – постоянная, зависящая только от размеров экранов и образца.

Для оценки условия малости толщины исследуемого образца (при фиксированных значениях диаметров образца и диафрагм) компьютерным моделированием была получена зависимость коэффициента  $K$  от величины параметра  $D = l / 2r_0$ , приведенная на рис. 2,б.

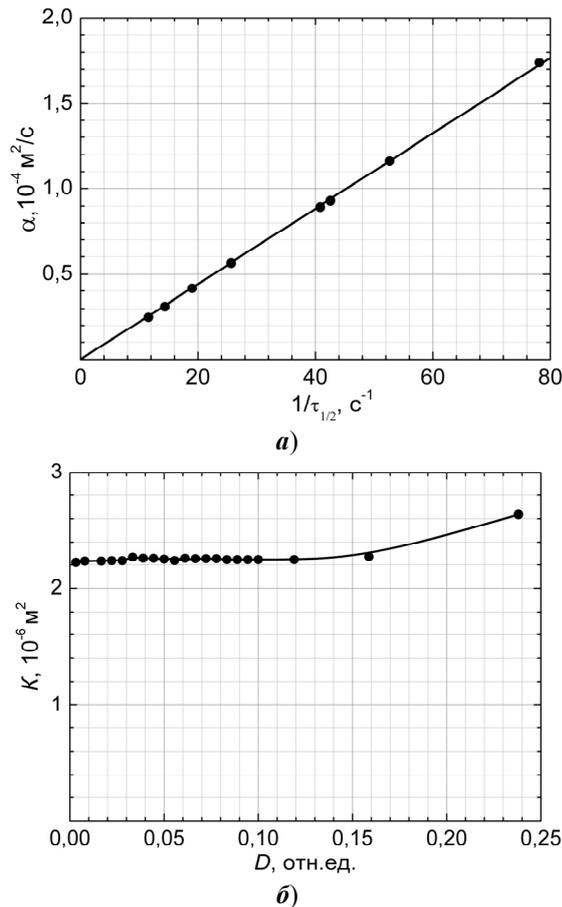


Рис. 2. Результаты математического моделирования для тонких образцов:  
**a** – связь между температуропроводностью  $\alpha$  и величиной  $1/\tau_{1/2}$   
 (прямая линия – результаты обработки по методу наименьших квадратов);  
**б** – зависимости коэффициента  $K$  в формуле (3) от параметра  $D = l / 2r_0$

Из приведенных результатов следует, что при толщинах образца  $l < 0,2r_0$  значение коэффициента  $K$  практически не зависит от толщины и коэффициента температуропроводности материала образца.

Поскольку в результате математического моделирования было установлено, что для тонких образцов коэффициент  $K$  в формуле (3) практически не зависит от коэффициента температуропроводности материала исследуемого образца и его толщины, а определяется только радиусами образца и экранов, то  $K$  можно определить по результатам измерений с тонким эталонным образцом по формуле

$$K = a_э \cdot (\tau_{1/2})_э, \tag{4}$$

где  $a_э$  – известное значение коэффициента температуропроводности тонкого эталонного образца;  $(\tau_{1/2})_э$  – измеренное значение  $\tau_{1/2}$  для этого образца. Тогда коэффициент температуропроводности исследуемого тонкого образца может быть определен по формуле

$$a_X = \frac{K}{(\tau_{1/2})_X}, \quad (5)$$

где  $(\tau_{1/2})_X$  – экспериментально полученное значение  $\tau_{1/2}$  для исследуемого образца.

### 5. Образцы и методика эксперимента

Для проверки корректности результатов математического моделирования были измерены коэффициенты температуропроводности тонких слоев меди и алюминия и спеченного слоя серебрясодержащей пасты, применяемого в межэлементных соединениях СПП.

Измерения коэффициента температуропроводности проводились методом лазерной вспышки на установке LFA 427 (NETZSCH) при комнатной температуре. Исследуемые образцы имели форму диска диаметром 12,6 мм. В эксперименте использовались теплоотражающие экраны, изготовленные из полированной нержавеющей стали. Диаметр экрана на фронтальной поверхности образца составлял 8 мм. В экране диаметром 12,6 мм, расположенном на тыльной поверхности образца, вырезалось отверстие диаметром 6 мм. Между экранами и исследуемым образцом создавался зазор размером около 0,5 мм.

Фронтальная поверхность образцов облучалась лазерным импульсом длительностью 0,6 мс с длиной волны 1,064 мкм и энергией 10 Дж. Температура тыльной поверхности образцов измерялась с помощью ИК-детектора. В ходе измерений регистрировалась кривая нагрева тыльной стороны образцов и определялось время  $\tau_{1/2}$ .

Эталонный образец изготавливался из Ag фольги (Ср 99,99) в виде диска диаметром 12,6 мм и толщиной 90 мкм с коэффициентом температуропроводности  $0,0179 \text{ м}^2/\text{с}$  [14]. В результате проведенных измерений и последующих расчетов по формуле (4) было получено значение коэффициента  $K$  для серебряной фольги, равное  $(2,21 \pm 0,06) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ , согласующееся с приведенными выше результатами математического моделирования.

Исследуемые образцы диаметром 12,6 мм изготавливались из фольги меди марки М1 толщиной 100 мкм, фольги алюминия марки А6 толщиной 200 мкм и спеченного при температуре 250 °С и давлении 10 МПа слоя серебрясодержащей пасты LTS043 [6] толщиной 60 мкм.

Используя измеренные значения времени  $\tau_{1/2}$  для исследуемых тонких металлических образцов и определенный в измерениях с эталонным образцом коэффициент  $K$ , по формуле (5) определили коэффициенты температуропроводности меди и алюминия:  $(0,0116 \pm 0,0005) \text{ м}^2/\text{с}$  и  $(0,0094 \pm 0,0005) \text{ м}^2/\text{с}$  соответственно. Соответствие полученных значений с табличными данными [14] ( $0,0118 \text{ м}^2/\text{с}$  для меди и  $0,0095 \text{ м}^2/\text{с}$  для алюминия) подтверждает корректность предложенной методики определения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев. Измеренное значение коэффициента температуропроводности тонкого спеченного слоя серебрясодержащей пасты составило  $(0,0130 \pm 0,0005) \text{ м}^2/\text{с}$ .

### Заключение

Предложена методика измерения коэффициента температуропроводности тонких металлических слоев методом лазерной вспышки, основанная на

формировании в исследуемых слоях радиальных тепловых потоков, направленных от периферии к центру образца.

Проведено математическое моделирование процессов теплопереноса в данной геометрии. Показано, что при малых толщинах исследуемых металлических слоев их коэффициент температуропроводности определяется только измеренными из кривых нагрева значениями времени  $\tau_{1/2}$  для образца и для эталона и не зависит от их толщин.

С использованием установки LFA 427 (NETZSCH) определены коэффициенты температуропроводности исследуемых тонких металлических слоев меди и алюминия. Соответствие результатов измерений коэффициентов температуропроводности литературным данным подтверждает корректность предложенной методики.

С применением разработанной методики определен коэффициент температуропроводности тонких спеченных слоев серебряносодержащей пасты, применяемых в межэлементных соединениях СПП.

### **Список литературы**

1. **Гува, А. Я.** Контактный теплообмен силовых полупроводниковых приборов / А.Я. Гува. – Новосибирск, 2005. – 210 с.
2. **Мартыненко, В. А.** Новые высокоомощные диоды и тиристоры для промышленности, транспорта и энергетики / В. А. Мартыненко, Г. Д. Чумаков // Силовая электроника. – 2005. – № 3. – С. 8–10.
3. Patent US 3555669. Process for soldering silicon wafers to contacts / Tarn W. H. A Patented Jan. 19, 1971.
4. Patentschrift DE 3414065 C2, Deutsches Patentamt / Fellenger J., Baumgartner W., 1989.
5. **Schwarzbauer, H.** Novel Large Area Joining Technique for Improved Power Device Performance / H. Schwarzbauer, R. Kuhnert // IEEE Trans. Ind. Appl. – 1991. – Vol. 27, № 1. – P. 93.
6. Исследование низкотемпературного спекания серебряносодержащих паст методом растровой электронной микроскопии / К. Н. Нищев, М. И. Новопольцев, К. В. Саврасов, В. П. Мишкин, В. В. Елисеев, В. А. Мартыненко, А. В. Гришанин // Прикладная физика. – 2015. – № 3. – С. 10–14.
7. **Mertens, C.** Die Niedertemperatur-Verbindungstechnik der Leistungselektronik / C. Mertens // Fortschrittberichte: VDI-Verlag, Duesseldorf, 2004. – 141 s.
8. **Кикоин, И. К.** Таблицы физических величин. Справочник / И. К. Кикоин ; под ред. И. К. Кикоина. – М. : Атомиздат, 1976. – С. 256.
9. **Parker, W. J.** Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity / W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler, G. L. Abbott // J. Appl. Phys. – 1961. – Vol. 32, № 9. – P. 1679–1684.
10. **Hubert, M. J.** Some extensions of the flash method of measuring thermal diffusivity / M. J. Hubert // J. Appl. Phys. – 1980. – Vol. 51 (9). – P. 4666–4672.
11. Влияние длительности импульса и утечек тепла в импульсном методе измерения температуропроводности / В. Г. Баранов, Ю. Г. Годин, И. Г. Меринов, А.А. Одинцов, А. В. Тенишев // Научная сессия МИФИ–2000 : сб. науч. тр. – М. : МИФИ, 2000. – Т. 8. – 220 с.
12. **Larson, K. B.** Correction for Finite Pulse Time Effects in Very Thin Samples Using the Flash Method of Measurement Thermal Diffusivity / K. B. Larson, K. Koyama // J. Appl. Phys. – 1967. – Vol. 38, № 2. – P. 465–474.
13. Высокотемпературные измерения температуропроводности реакторных материалов методом лазерной вспышки / В. Г. Баранов, А. В. Тенишев, А. В. Лунёв,

- С. А. Покровский, А. В. Хлунов // Ядерная физика и инжиниринг. – 2011. – Т. 2, № 4. – С. 291–302.
14. **Зиновьев, В. Е.** Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник / В. Е. Зиновьев. – М. : Metallurgiya. – 1989. – 384 с.

### References

1. Guva A. Ya. *Kontaktnyy teploobmen silovyykh poluprovodnikovyykh priborov* [Contact heat exchange of power semiconductor devices]. Novosibirsk, 2005, 210 p.
2. Martynenko V. A., Chumakov G. D. *Silovaya elektronika* [Power electronics]. 2005, no. 3, pp. 8–10.
3. *Patent US 3555669. Process for soldering silicon wafers to contacts.* Tarn W. H. A Patented Jan. 19, 1971.
4. *Patentschrift DE 3414065 C2, Deutsches Patentamt.* Fellenger J., Baumgartner W. 1989.
5. Schwarzbauer H., Kuhnert R. *IEEE Trans. Ind. Appl.* 1991, vol. 27, no. 1, p. 93.
6. Novopol'tsev M. I., Savrasov K. V., Mishkin V. P., Eliseev V. V., Martynenko V. A., Grishanin A. V. *Prikladnaya fizika* [Applied physics]. 2015, no. 3, pp. 10–14.
7. Mertens C. *Fortschrittberichte: VDI-Verlag* [Performance report: VDI-publishing]. Duesseldorf, 2004, 141 p.
8. Kikoin I. K. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* [Tables of physical values. Reference book]. Moscow: Atomizdat, 1976, p. 256.
9. Parker W. J., Jenkins R. J., Butler C. P., Abbott G. L. *J. Appl. Phys.* 1961, vol. 32, no. 9, pp. 1679–1684.
10. Hubert M. J. *J. Appl. Phys.* 1980, vol. 51 (9), pp. 4666–4672.
11. Baranov V. G., Godin Yu. G., Merinov I. G., Odintsov A. A., Tenishev A. V. *Nauchnaya sessiya MIFI–2000: sb. nauch. tr.* [Scientific session MIFI-2000: collected papers]. Moscow: MIFI, 2000, vol. 8, 220 p.
12. Larson K. B., Koyama K. *J. Appl. Phys.* 1967, vol. 38, no. 2, pp. 465–474.
13. Baranov V. G., Tenishev A. V., Lunev A. V., Pokrovskiy S. A., Khlunov A. V. *Yadernaya fizika i inzhiniring* [Nuclear physics and engineering]. 2011, vol. 2, no. 4, pp. 291–302.
14. Zinov'ev V. E. *Teplofizicheskie svoystva metallov pri vysokikh temperaturakh. Spravochnik* [Thermophysical properties of metals at high temperatures]. Moscow: Metallurgiya, 1989, 384 p.

#### **Нищев Константин Николаевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, директор Института физики  
и химии, Мордовский государственный  
университет имени Н. П. Огарева  
(Россия, г. Саранск,  
ул. Большевикская, 68)

E-mail: nishchev@inbox.ru

#### **Nishchev Konstantin Nikolaevich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, director  
of the Institute of Physics and Chemistry,  
Ogarev Mordovia State University  
(68 Bolshevistskaya street, Saransk, Russia)

#### **Новопольцев Михаил Ильич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра общей физики,  
Мордовский государственный  
университет имени Н. П. Огарева  
(Россия, г. Саранск,  
ул. Большевикская, 68)

E-mail: nishchev@inbox.ru

#### **Novopol'tsev Mikhail Il'ich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of general physics,  
Ogarev Mordovia State University  
(68 Bolshevistskaya street, Saransk, Russia)

***Беглов Владимир Иванович***

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра радиотехники,  
Мордовский государственный  
университет имени Н. П. Огарева  
(Россия, г. Саранск,  
ул. Большевикская, 68)

E-mail: begvi1@mail.ru

***Beglov Vladimir Ivanovich***

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of radio engineering,  
Ogarev Mordovia State University  
(68 Bolshevistskaya street, Saransk, Russia)

***Окин Максим Александрович***

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра радиотехники, Мордовский  
государственный университет  
имени Н. П. Огарева (Россия,  
г. Саранск, ул. Большевикская, 68)

E-mail: okinma@mail.ru

***Okin Maksim Aleksandrovich***

Candidate of engineering sciences, associate  
professor, sub-department of radio  
engineering, Ogarev Mordovia State  
University (68 Bolshevistskaya street,  
Saransk, Russia)

***Лютова Екатерина Николаевна***

ведущий инженер, кафедра общей  
физики, Мордовский государственный  
университет имени Н. П. Огарева  
(Россия, г. Саранск,  
ул. Большевикская, 68)

E-mail: ekat.lyutova@yandex.ru

***Lyutova Ekaterina Nikolaevna***

Principal engineer, sub-department  
of general physics, Ogarev Mordovia  
State University (68 Bolshevistskaya  
street, Saransk, Russia)

---

УДК 536.2.083

**Измерение температуропроводности тонких металлических слоев методом лазерной вспышки / К. Н. Нищев, М. И. Новопольцев, В. И. Беглов, М. А. Окин, Е. Н. Лютова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 101–110.**

*В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский*

**ОСОБЕННОСТИ ФОТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА,  
СВЯЗАННОГО С ВОЗБУЖДЕНИЕМ ПРИМЕСНЫХ  
КОМПЛЕКСОВ  $A^+ + e$  В КВАЗИНУЛЬМЕРНЫХ  
СТРУКТУРАХ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЕ**

**Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Интерес к фотодиэлектрическому эффекту (ФДЭ) обусловлен тем, что он может быть использован как эффективный механизм воздействия ИК-излучения на распространение субмиллиметровых волн в квазиульмерных структурах и как метод регистрации ИК-излучения. Во внешнем магнитном поле появляются новые возможности для управления ФДЭ, что важно для ряда приложений в полупроводниковой наноэлектронике. Цель работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего магнитного поля на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерных структурах.

*Материалы и методы.* Кривые спектральной зависимости относительного изменения диэлектрической проницаемости (ОИДП), а также зависимости ОИДП от величины внешнего магнитного поля построены для квазиульмерной структуры, состоящей из InSb квантовых точек. Расчет энергии связи дырки в примесном комплексе  $A^+ + e$  выполнен в модели потенциала нулевого радиуса в адиабатическом приближении. ОИДП рассчитано в дипольном приближении с учетом дисперсии радиуса КТ.

*Результаты.* Выявлен дихроизм ФДЭ, связанный как с нарушением центральной симметрии основного состояния электронного адиабатического потенциала, так и с наличием внешнего магнитного поля. Показано, что внешнее магнитное поле подавляет ФДЭ, что связано с усилением локализации электронной волновой функции в магнитном поле, а также с модификацией электронного адиабатического потенциала. Найдено, что порог ФДЭ в магнитном поле сдвигается в коротковолновую область спектра, при этом в случае поперечной относительно направления внешнего магнитного поля поляризации света пики в спектральной зависимости ФДЭ расщепляются в дублеты Зеемана.

*Выводы.* В магнитном поле возможно эффективное управление ФДЭ за счет модификации электронного адиабатического потенциала и электронной волновой функции.

**Ключевые слова:** фотодиэлектрический эффект, магнитное поле, квантовая точка, адиабатическое приближение, примесный комплекс, относительная диэлектрическая проницаемость, эффект Зеемана, электронный адиабатический потенциал, квазиульмерная структура.

*V. D. Krevchik, A. V. Razumov, P. S. Budyanskiy*

**FEATURES OF THE PHOTODIELECTRIC EFFECT,  
ASSOCIATED WITH  $A^+ + e$  EXTRINSIC COMPLEX  
EXCITATION IN QUASIZERO-DIMENSIONAL  
STRUCTURES IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD**

**Abstract.**

*Background.* Scientific interest to the photodielectric effect (PDE) is caused by a possibility of its usage as an efficient mechanism of infrared emission influence on propagation of submillimeter waves in quasizero-dimensional structures and as a method of infrared emission registration. In external magnetic fields there occur new opportunities for PDE management, which is important for a number of applications in semiconductor nanoelectronics. The aim of the work is to theoretically re-search the influence of an external magnetic field on PDE, associated with  $A^+ + e$  extrinsic complex excitation in quasizero-dimensional structures.

*Materials and methods.* Curves of spectral dependence of relative change of dielectric permittivity (RCDP), as well as ECDP dependence on the external magnetic field value were generated for a quasizero-dimensional structure, consisting of InSb quantum dots (QD). Calculation of hole binding energy in  $A^+ + e$  extrinsic complex was performed in a model of zero radius potential in adiabatic approximation. RCDP was calculated in dipole approximation, taking into account QD radius dispersion.

*Results.* The authors have revealed PDE dichroism, caused by a breakdown of central symmetry of the general state of electronic adiabatic potential, as well as by external magnetic field's presence. The article shows that the external magnetic field suppresses PDE, which is caused by intensification of electronic wave function localization in the magnetic field, as well as by modification of the electronic adiabatic potential. It has been found that PDE in a magnetic field shifts to the short-wave spectral region. In case of light polarization being transversal to the direction of external magnetic field, the peaks in spectral dependence of PSE split to Zeeman doublets.

*Conclusions.* Efficient PDE management is possible in a magnetic field due to modification of an electronic adiabatic potential and an electronic wave function.

**Key words:** photodielectric effect, magnetic field, quantum dot, adiabatic approximation, extrinsic complex, relative dielectric permittivity, Zeeman effect, electronic adiabatic potential, quasizero-dimensional structure.

**Введение**

В настоящей работе проанализирована возможность регистрации возбужденных состояний примесных комплексов  $A^+ + e$  по их вкладу в диэлектрическую проницаемость полупроводниковой квазиульмерной структуры при внутризонных оптических переходах электронов во внешнем магнитном поле. Ранее [1] нами было показано, что, поскольку эффективный радиус возбужденных состояний примесного комплекса  $A^+ + e$  в квантовой точке (КТ) значительно превышает эффективный радиус основного состояния, то за счет роста поляризуемости может иметь место заметное изменение диэлектрической проницаемости полупроводниковой квазиульмерной структуры – фотодиэлектрический эффект (ФДЭ). Во внешнем магнитном поле появляются новые возможности для управления ФДЭ, что важно для приложений в полупроводниковой наноэлектронике: управляемое воздействие на процесс распространения субмиллиметровых волн в наноструктурах; детекторы ИК-излучения с управляемыми параметрами; метод спектроскопических исследований примесей в полупроводниковых наноструктурах.

Цель настоящей работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего магнитного поля на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерных структурах, представляющих

собой прозрачную диэлектрическую матрицу с синтезированными в ней полупроводниковыми КТ.

### Расчет энергии связи комплекса $A^+ + e$ в полупроводниковой квантовой точке в условиях фотовозбуждения во внешнем магнитном поле

Процесс фотовозбуждения примесного комплекса  $A^+ + e$  связан с оптическими переходами электрона из основного состояния КТ в возбужденные состояния размерно-квантованной зоны проводимости во внешнем магнитном поле. Учет кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, локализованной на  $A^0$ -центре, приводит к тому, что в результате электронных переходов будет изменяться энергия связанного состояния дырки вследствие изменения электронного адиабатического потенциала, который при фиксированном радиусе КТ зависит только от начального и конечного состояний электрона.

Взаимодействие электрона, находящегося в основном состоянии КТ с дыркой, локализованной на  $A^0$ -центре, будем рассматривать в рамках адиабатического приближения. В этом случае электронный потенциал  $V_{n,l,m}(\vec{r})$ , действующий на дырку, можно считать усредненным по движению электрона [2]:

$$V_{n,l,m}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{R_0} \frac{|\Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e)|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} d\vec{r}_e, \quad (1)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала КТ;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e)$  – волновая функция электрона в КТ;  $n$  – радиальное квантовое число электрона;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – магнитное квантовое число;  $l = 0, 1, 2, \dots$  – орбитальное квантовое число.

В первом порядке теории возмущений для основного состояния электрона ( $m = 0, l = 0$ ) потенциал (1) может быть записан в виде [3]:

$$V_{n,0,0}(\rho) = -\frac{e^2\beta_n}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} + \frac{m_h^*}{2} \left( \omega_n^2 + \frac{\omega_B^2}{2} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_n^2, \quad (2)$$

где

$$\beta_n = \gamma_0 - Ci(2\pi n) + \ln(2\pi n);$$

$$\hbar\omega_n = \left[ \left( 2\hbar^2\pi^2 n^2 e^2 \right) / \left( 3m_h^* R_0^3 4\pi\epsilon_0\epsilon \right) \right]^{1/2};$$

$\rho, \varphi, z$  – цилиндрические координаты;  $\gamma_0 = 1,781$  – постоянная Эйлера;  $Ci(x)$  – интегральный косинус;  $m_h^*$  – эффективная масса дырки;  $\omega_B = |e|B / m_e^*$  – циклотронная частота.

Энергия связи дырки в комплексе  $A^+ + e$  в КТ в магнитном поле определяется решением следующего трансцендентного уравнения [3]:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 \beta_h^{-1} + (2\beta_h)^{-1} + w \beta_h^{-1}} = \\ & = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_h}} \int_0^{+\infty} dt \exp \left[ - \left( \beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2t \sqrt{2t}} - w (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2wt))^{-1} \exp \left[ - \frac{z_a^{*2}}{2\beta_h} \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left[ - \frac{w \rho_a^{*2}}{2\beta_h (1 - \exp(-2wt))} (1 + \exp(-2wt) - 2 \exp(-wt) \operatorname{ch}(\beta_h a^{*-2} t)) \right], \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\eta_{\lambda h}^2 = |E_{\lambda h}|/E_h$ ;  $E_{\lambda h}$  – энергия связи дырки, отсчитываемая от дна электронного адиабатического потенциала;  $E_h$  – эффективная боровская энергия дырки;  $\beta_0 = \beta_n e^2 / 4\pi \epsilon_0 \epsilon R_0^* a_h E_h$ ;  $R_0^* = R_0 / a_h$ ;  $\beta_h = E_h / \hbar \omega_n$ ;  $w = \sqrt{1 + \beta_h^2 a^{*-4} / 2}$ ;  $a^* = a_B / a_h$ ;  $a_B = \sqrt{\hbar / (m_e^* \omega_B)}$  – магнитная длина;  $\eta_i^2 = |E_i|/E_h$ ;  $E_i$  – энергия связанного состояния дырки, локализованной на таком же  $A^+$ -центре в объемном полупроводнике;  $z_a^* = z_a / a_h$ ;  $\rho_a^* = \rho_a / a_h$ ;  $a_h$  – эффективный боровский радиус дырки.

Найдем явный вид потенциала  $V_{n,l,m}(\vec{r}_h)$ , определяемого формулой (1) в случае, когда электрон находится в возбужденном состоянии КТ.

Выражение (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{n,l,m}(\vec{r}_h) = & - \frac{e^2}{\epsilon} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \int_0^{r_h} \frac{|\Psi_{n,l,m}(r_e, \theta, \varphi)|^2 r_e^2 dr_e}{\sqrt{r_h^2 + r_e^2 - 2r_h r_e \cos \theta}} + \right. \\ & \left. + \int_{r_h}^{R_0} \frac{|\Psi_{n,l,m}(r_e, \theta, \varphi)|^2 r_e^2 dr_e}{\sqrt{r_h^2 + r_e^2 - 2r_h r_e \cos \theta}} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

В условиях внешнего магнитного поля возможны дипольные оптические переходы из  $s$ -состояния в  $p$ -состояние с обычными правилами отбора для магнитного квантового числа: в направлении поля  $m = 0$  и в поперечном направлении  $m = \pm 1$ .

Рассмотрим случай, когда  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$  ( $\vec{e}_\lambda$  – единичный вектор поляризации света). В этом случае  $m = 0$  и для сферических функций имеем

$$Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{4\pi}} \cos \theta. \quad (5)$$

Учитывая выражение для производящей функции полиномов Лежандра [4]:

$$\frac{1}{\sqrt{r_h^2 + r_e^2 - 2r_h r_e \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_h^l}{r_e^{l+1}} P_l(\cos \theta), & \text{если } r_h < r_e, \\ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_e^l}{r_h^{l+1}} P_l(\cos \theta), & \text{если } r_h > r_e, \end{cases} \quad (6)$$

для интеграла по переменной  $\theta$  имеем

$$\int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta P_l(\cos \theta) d\theta = \frac{2(l+l^2-2)\sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(l+l^2-6)}. \quad (7)$$

С учетом (7) суммы в (6) запишутся в виде

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_h^l}{r_e^{l+1}} \times \frac{2(l+l^2-2)\sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(l+l^2-6)} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r_e} + \frac{2}{5} \times \frac{r_h^2}{r_e^3} \right), \quad (8)$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_e^l}{r_h^{l+1}} \times \frac{2(l+l^2-2)\sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(l+l^2-6)} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{r_h} + \frac{2}{5} \times \frac{r_e^2}{r_h^3} \right), \quad (9)$$

тогда для интегралов по  $r_e^*$  имеем

$$\int_0^{r_h^*} \left( \frac{1}{r_h} + \frac{2}{5} \times \frac{r_e^2}{r_h^3} \right) J_{\frac{3}{2}}^2 \left( \frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r_e^* \right) dr_e^* = \frac{r_h^{*3} \tilde{X}_{n,1}^3}{15 \times 2^5 \Gamma^2 \left( \frac{5}{2} \right) R_0^{*3}} \times \left\{ 15 {}_2F_3 \left( 2, 2; \frac{5}{2}, 3, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) + 4 {}_2F_3 \left( 2, 3; \frac{5}{2}, 4, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) \right\} \quad (10)$$

и

$$\int_{r_h}^{R_0^*} \left( \frac{1}{r_e} + \frac{2}{5} \times \frac{r_h^2}{r_e^3} \right) J_{\frac{3}{2}}^2 \left( \frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r_e^* \right) dr_e^* = \frac{\tilde{X}_{n,1}^3}{3^3 5 R_0^{*2} \Gamma^2 \left( \frac{3}{2} \right)} \times \left\{ 3 r_h^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) - 3 \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) + \frac{5}{2} R_0^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) - \frac{5}{2} \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) \right\}, \quad (11)$$

где  $\tilde{X}_{n,1}$  – корень функции Бесселя полуцелого порядка  $3/2$ ;  
 ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$  – обобщенная гипергеометрическая функция [4].

Выражение для потенциала  $V_{n,1,0}(\bar{r}_h)$  (4), учитывая (7), (10) и (11), за-  
 пишется в виде

$$\begin{aligned}
 V_{n,1,0}(\bar{r}_h) = & -\frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\tilde{X}_{n,1}^3}{3 \times 5 R_0^{*2}} \left\{ r_h^{*3} 2^{-5} R_0^{*-1} \Gamma^{-2} \left( \frac{5}{2} \right) \left[ 15 {}_2F_3 \left( 2, 2; \frac{5}{2}, 3, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) + \right. \right. \\
 & + 4 {}_2F_3 \left( 2, 3; \frac{5}{2}, 4, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) \left. \right] + 3^{-2} \Gamma^{-2} \left( \frac{3}{2} \right) \left[ 3 r_h^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) - \right. \\
 & - 3 \frac{r_h^{*3}}{R_0^{*2}} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) + \frac{5}{2} R_0^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) - \\
 & \left. \left. - \frac{5}{2} \frac{r_h^{*3}}{R_0^{*2}} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) \right] \right\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда  $\bar{e}_\lambda \perp \bar{B} : m = \pm 1$ , и для сферических функций  
 имеем

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin \theta. \quad (13)$$

С учетом (6) для интеграла по  $\theta$  получим

$$\int_0^\pi \sin \theta \sin^2 \theta P_l(\cos \theta) d\theta = -\frac{8 \sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(l+l^2-6)}. \quad (14)$$

Суммы в (6) запишутся в виде

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_h^l}{r_e^{l+1}} \times \frac{8 \sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(6-l-l^2)} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{r_e} - \frac{2}{5} \times \frac{r_h^2}{r_e^3} \right), \quad (15)$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{r_e^l}{r_h^{l+1}} \times \frac{8 \sin(\pi l)}{\pi l(l+1)(6-l-l^2)} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{r_h} - \frac{2}{5} \times \frac{r_e^2}{r_h^3} \right). \quad (16)$$

Интегрирование по  $r_e^*$  дает

$$\int_0^{r_h^*} \left( \frac{1}{r_h} - \frac{2}{5} \times \frac{r_e^2}{r_h^3} \right) J_{\frac{3}{2}}^2 \left( \frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r_e^* \right) dr_e^* = \frac{r_h^{*3} \tilde{X}_{n,1}^3}{15 \times 2^5 \Gamma^2 \left( \frac{5}{2} \right) R_0^{*3}} \times$$

$$\times \left\{ 15 {}_2F_3 \left( 2, 2; \frac{5}{2}, 3, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) - 4 {}_2F_3 \left( 2, 3; \frac{5}{2}, 4, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) \right\} \quad (17)$$

и

$$\int_{r_h}^{R_0^*} \left( \frac{1}{r_e} - \frac{2}{5} \times \frac{r_h^2}{r_e^3} \right) J_{\frac{3}{2}}^2 \left( \frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r_e^* \right) dr_e^* = \frac{\tilde{X}_{n,1}^3}{3^3 5 R_0^{*2} \Gamma^2 \left( \frac{3}{2} \right)} \times$$

$$\times \left\{ -3 r_h^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) + 3 \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{2} R_0^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) + \frac{5}{2} \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) \right\}. \quad (18)$$

Выражение для потенциала  $V_{n,1,\pm 1}(\bar{r}_h)$  в (4), учитывая (14), (17) и (18), можно представить в виде

$$V_{n,1,\pm 1}(\bar{r}_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\tilde{X}_{n,1}^3}{5 \times 2^2 R_0^{*2}} \left\{ r_h^{*3} 2^{-5} R_0^{*-1} \Gamma^{-2} \left( \frac{5}{2} \right) \left[ 15 {}_2F_3 \left( 2, 2; \frac{5}{2}, 3, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - 4 {}_2F_3 \left( 2, 3; \frac{5}{2}, 4, 4; -\frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} r_h^{*2} \right) \right] + 3^{-2} \Gamma^{-2} \left( \frac{3}{2} \right) \left[ -3 r_h^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) + \right.$$

$$\left. + 3 \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{1}{2}, 2; \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) - \frac{5}{2} R_0^{*2} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -\tilde{X}_{n,1}^2 \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{5}{2} \frac{r_h^{*3}}{R_0^*} {}_2F_3 \left( \frac{3}{2}, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4; -r_h^{*2} \frac{\tilde{X}_{n,1}^2}{R_0^{*2}} \right) \right] \right\}. \quad (19)$$

Используя разложение в ряд Тейлора вблизи  $r_{h \min}$  и ограничившись квадратичным членом, получим

$$V_{n,1,0}(r_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon R_0} \beta_{n,0} - \frac{m_h^*}{2} \left( \omega_{n,0}^2 + \frac{\omega_B^2}{2} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_{n,0}^2, \quad (20)$$

$$V_{n,1,\pm 1}(r_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon R_0} \beta_{n,\pm 1} - \frac{m_h^*}{2} \left( \omega_{n,\pm 1}^2 + \frac{\omega_B^2}{2} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_{n,\pm 1}^2, \quad (21)$$

где величины  $\beta_{n,0}$ ,  $\beta_{n,\pm 1}$ ,  $\omega_{n,0}$  и  $\omega_{n,\pm 1}$  определяются следующим образом:

$$\beta_{n,0} = \frac{X_{n,1}}{30R_0^2 r_{h\min}^3 \left( 3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^2 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \times$$

$$\times \left[ 6r_{h\min}^5 X_{n,1}^3 - 3r_{h\min}^5 X_{n,1} - 15r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 + 40r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 + \right.$$

$$\left. + 3r_{h\min}^5 X_{n,1} \cos(2X_{n,1}) + 15r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 \cos(2X_{n,1}) + \right.$$

$$\left. + 30r_{h\min} X_{n,1} R_0^4 \cos\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 Ci(2X_{n,1}) + \right.$$

$$\left. + 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 Ci\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 \ln\left(\frac{r_{h\min}}{R_0}\right) + \right.$$

$$\left. + 6r_{h\min}^5 X_{n,1}^2 \sin(2X_{n,1}) + 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^2 R_0^2 \sin(2X_{n,1}) - \right.$$

$$\left. - 15r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 R_0^3 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 15R_0^5 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) \right], \quad (22)$$

$$\beta_{n,\pm 1} = \frac{X_{n,1}^2}{2 \left( 3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^2 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \left[ \cos(2X_{n,1}) - 1 + 2\gamma_0 X_{n,1}^2 - \right.$$

$$\left. - 2X_{n,1}^2 - 2X_{n,1}^2 Ci(2X_{n,1}) + 2X_{n,1}^2 \ln(2X_{n,1}) + 2X_{n,1} \sin(2X_{n,1}) \right], \quad (23)$$

$$\hbar\omega_{n,0} = \left[ \frac{\hbar^2 e^2 X_{n,1}}{m_h 5r_{h\min}^5 R_0^3 \varepsilon \left( 3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^3 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \times \right.$$

$$\times \left( r_{h\min}^5 X_{n,1} + 2r_{h\min}^5 X_{n,1}^3 - 5r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 - r_{h\min}^5 X_{n,1} \cos(2X_{n,1}) + \right.$$

$$\left. + 15r_{h\min} X_{n,1} R_0^2 \left( r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 - 4R_0^2 \right) \cos\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 2r_{h\min}^5 X_{n,1}^2 \sin(2X_{n,1}) - \right.$$

$$\left. - 45r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 R_0^3 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) + 30R_0^5 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$\hbar\omega_{n,\pm 1} = \left[ \frac{\hbar^2 e^2 X_{n,1}^2 \left( 2X_{n,1}^4 - 1 - 2X_{n,1}^2 + \cos(2X_{n,1}) + 2X_{n,1} \sin(2X_{n,1}) \right)}{m_h 10R_0^3 \varepsilon \left( 3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^3 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

В результате энергия связи дырки в комплексе  $A^+ + e$  в случае, когда электрон находится в возбужденном состоянии КТ с учетом (20) и (21), будет определяться решением следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \beta_{(1,2)} \beta_{h(1,2)}^{-1} + (2\beta_{h(1,2)})^{-1} + w_{(1,2)} \beta_{h(1,2)}} = \\ & = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_{h(1,2)}}} \int_0^{+\infty} dt \exp \left[ - \left( \beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \beta_{(1,2)} + w_{(1,2)} + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2t\sqrt{2t}} - w_{(1,2)} (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2w_{(1,2)}t))^{-1} \exp \left[ -\frac{z_a^{*2}}{2\beta_{h(1,2)}} \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} \right) \right] \right] \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{w_{(1,2)} \rho_a^{*2}}{2\beta_{h(1,2)}} \times \frac{1 + \exp(-2w_{(1,2)}t) - 2 \exp(-w_{(1,2)}t) \operatorname{ch}(\beta_{h(1,2)} a^{*-2}t)}{1 - \exp(-2w_{(1,2)}t)} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$\eta_{\lambda h1}^2 = |E_{\lambda h1}|/E_h; \quad \eta_{\lambda h2}^2 = |E_{\lambda h2}|/E_h; \quad \beta_1 = \beta_{n,0} e^2/4\pi\epsilon_0\epsilon R_0^* a_h E_h;$$

$$\beta_2 = \beta_{n,\pm 1} e^2/4\pi\epsilon_0\epsilon R_0^* a_h E_h; \quad \beta_{h1} = E_h/\hbar\omega_{n,0}; \quad \beta_{h2} = E_h/\hbar\omega_{n,\pm 1};$$

$$w_1 = \sqrt{1 + \beta_{h1}^2 a^{*-4}/2}; \quad w_2 = \sqrt{1 + \beta_{h2}^2 a^{*-4}/2}.$$

Волновая функция дырки, локализованной на  $A^+$ -центре, для случая возбужденного состояния комплекса  $A^+ + e$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{h(1,2)}(\rho, \varphi, z) &= C_{(1,2)} \exp \left( -\frac{w_{(1,2)} \rho^2 + z^2}{4\beta_{h(1,2)} a_h^2} \right) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} dt \exp \left[ - \left( \beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \beta_{(1,2)} + w_{(1,2)} + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\ & \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2w_{(1,2)}t])^{-1} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{z^2 \exp[-2t]}{2\beta_{h(1,2)} a_h^2 (1 - \exp[-2t])} \right\} \exp \left[ -\frac{w_{(1,2)} \rho^2 \exp[-2w_{(1,2)}t]}{4\beta_{h(1,2)} a_h^2 (1 - \exp[-2w_{(1,2)}t])} \right], \quad (27) \end{aligned}$$

где  $C_{(1,2)}$  – нормировочный множитель, определяемый выражением вида

$$C_{(1,2)} = \left[ -2^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} a_h^3 \frac{\beta_{h(1,2)}^{\frac{3}{2}} w_{(1,2)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - w_{(1,2)}\right)}{\left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 + w_{(1,2)}}{2} + \frac{1}{4}\right)^2} \times \right. \\ \left. \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 + w_{(1,2)}}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 - w_{(1,2)}}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 + w_{(1,2)}}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \left[ \Psi\left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 + w_{(1,2)}}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 - w_{(1,2)}}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \right]^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (28)$$

Полученные соотношения (26) и (27) будут использованы в следующем разделе для расчета коэффициента поглощения света при фотовозбуждении примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерной структуре.

**Расчет коэффициента поглощения света комплексами  $A^+ + e$  в квазиульмерной структуре в случае продольной по отношению к направлению магнитного поля поляризации**

Рассмотрим процесс фотовозбуждения комплексов  $A^+ + e$  в КТ, синтезированных в прозрачной диэлектрической матрице в магнитном поле, в случае, когда  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ . Будем считать, что  $A^+$ -центр локализован в точке  $\vec{R}_a = (0, 0, 0)$ . Энергетический спектр электрона в магнитном поле во втором порядке теории возмущений будет определяться выражением вида

$$E = E^{(0)} + V_{n,l,m;n,l,m} + \sum_{n'l'm'} \frac{R_0^{*2} |V_{n,l,m;n',l',m'}|^2}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2}, \quad (29)$$

здесь  $E^{(0)} = \tilde{X}_{n,l}^2 E_h / R_0^{*2}$  – нулевое приближение к энергии электрона в размерно-квантованной зоне;  $V_{n,l,m;n',l',m'}$  – матричный элемент оператора возмущения:

$$V_{n,l,m;n',l',m'} = \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ \frac{\hbar \omega_B m}{4\pi (\tilde{X}_{n,l}^2 - \tilde{X}_{n',l}^2)} J_{l+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n,l}) J_{l+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n',l}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ R_0^* \tilde{X}_{n',l} J_{l+\frac{1}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) - R_0^* \tilde{X}_{n,l} J_{l+\frac{1}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) \right] + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m_h^* \omega_B^2 R_0^* \left( \tilde{X}_{n,l}^{l+\frac{3}{2}} \right)^{2k+1}}{k! \Gamma \left( l+k+\frac{5}{2} \right) 2^{l+4+2k}} \times \\
 & \times \left[ \sqrt{\frac{(l-m+4)(l-m+3)(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+1)(2l-1)^2(2l-3)}} \times \right. \\
 & \times \frac{F \left( -k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l-2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2} \right)}{(2l+2k+2) \Gamma \left( l+\frac{1}{2} \right)} - \frac{2F \left( -k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2} \right)}{(2l+3)(2l-1)(2l+2k+4)} \times \\
 & \times \sqrt{(l-m)(l-m-1)(l+m+2)(l+m+1)} + \frac{F \left( -k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l+2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2} \right)}{2l+2k+6} \times \\
 & \left. \times \sqrt{\frac{(l+m+4)(l+m+3)(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+5)(2l+3)^2(2l+1)}} \right]. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Эффективный гамильтониан взаимодействия  $\hat{H}_{intB}^{(s)}$  с полем световой волны в случае, когда  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$  запишется как

$$\hat{H}_{intB}^{(s)} = -i \hbar \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2 \alpha^*}{m^* \omega}} I_0 \exp(i \vec{q}_s \vec{r}) (\vec{e}_{\lambda_s} \nabla_{\vec{r}}), \tag{31}$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент локального поля;  $\alpha^*$  – постоянная тонкой структуры с учетом статической относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ ;  $I_0$  – интенсивность света с частотой  $\omega$ , волновым вектором  $\vec{q}_s$  и единичным вектором поляризации  $\vec{e}_{\lambda_s}$ ;  $\nabla_{\vec{r}}$  – оператор Гамильтона.

Матричный элемент  $M_{f,\lambda}^{(s)}$ , определяющий величину силы осциллятора дипольных оптических переходов электрона и дырки из основного состояния  $\Phi_{in}(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$  примесного комплекса в возбужденные состояния  $\Phi_{out}(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$  КТ запишутся как

$$\begin{aligned}
 M_{f,\lambda}^{(s)} &= i\sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} (E_{n,1,0} - E_{1,0,0} - (E_{\lambda h1} - E_{\lambda h})) \times \\
 &\quad \times \langle \Phi_{out}^{(s)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) | (\vec{e}_{\lambda s}, \vec{r}_e) | \Phi_{in}^{(s)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \rangle = \\
 &= i\sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} (E_{n,1,0} - E_{1,0,0} - (E_{\lambda h1} - E_{\lambda h})) \times \\
 &\quad \times \langle \Psi_{h1}(\vec{r}_h) | \Psi_{h0}(\vec{r}_h) \rangle \langle \Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e) | (\vec{e}_{\lambda s}, \vec{r}_e) | \Psi_{1,0,0}(\vec{r}_e) \rangle. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Интегралы в (32) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{R_0^*} \exp\left[-\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))}\right) \frac{z^{*2}}{4}\right] dz^* = \\
 &= \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf}\left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}\right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}}, \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{R_0^*} \rho^{*2} \exp\left[-\left(\frac{w}{\beta_h(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))}\right) \frac{\rho^{*2}}{4}\right] d\rho^* = \\
 &= 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf}\left[\left(\frac{w}{\beta_h(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2}\right]}{\left(\frac{w}{\beta_h(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)^{3/2}} - \\
 &- 2R_0^* \frac{\exp\left[-\left(\frac{w}{\beta_h(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))}\right) \frac{R_0^{*2}}{4}\right]}{\left(\frac{w}{\beta_h(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Интегрирование по угловым переменным в (32) дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos\theta Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{\delta_{m,0} \delta_{l,1}}{\sqrt{3}}. \quad (35)$$

Интеграл по радиальной координате можно записать в виде

$$\int_0^{R_0^*} dr^* r^* J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{1,0}}{R_0^*} r^*\right) J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r^*\right) = \frac{R_0^*}{(\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \times$$

$$\times \left[ R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}}\left(R_0^* \tilde{X}_{n,1}\right) J_{\frac{3}{2}}\left(R_0^* \tilde{X}_{1,0}\right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}\left(R_0^* \tilde{X}_{1,0}\right) J_{\frac{5}{2}}\left(R_0^* \tilde{X}_{n,1}\right) \right]. \quad (36)$$

В результате для матричного элемента в (32) получим

$$M_{f\lambda', f\lambda}^{(s)} = i \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - \right.$$

$$\left. - (E_{\lambda h(1,2)} - E_{\lambda h}) + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1); n', l', m'}|^2 - |V_{1,0,0; n', l', m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n', l'}^2) E_h} \right) \times$$

$$\times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_h^{\frac{3}{2}} \beta_{h1}^{\frac{3}{2}} w w_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right)} \times \right.$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_1\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \Psi\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \times$$

$$\times \left[ \left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[ \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1/2} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t - \left(\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - \beta_0 + w_1 + \frac{1}{2}\right)t'\right] dt dt' \times$$

$$\times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} (1 - \exp[-2w_1 t'])^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\sqrt{\pi} R_0^*}{\sqrt{3} (\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \times \frac{\operatorname{erf} \left[ -\frac{R_0^*}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2} \right]}{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{2\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left[ \left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2} \right]}{\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{3/2}} - \right. \\
 & \left. - 2R_0^* \frac{\exp \left[ -\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w^{(0)}}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)} \right\} \times \\
 & \times \left( R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left( R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) \right), \quad (37)
 \end{aligned}$$

здесь  $\operatorname{erf}(x)$  – функция ошибок.

Будем предполагать, что дисперсия  $u$  размеров КТ возникает в процессе фазового распада пересыщенного твердого раствора и удовлетворительно описывается формулой Лифшица – Слезова [5]:

$$P(u) = \begin{cases} \frac{3^4 e u^2 \exp[-1/(1-2u/3)]}{2^{5/3} (u+3)^{7/3} (3/2-u)^{11/3}}, & u < \frac{3}{2}, \\ 0, & u > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (38)$$

где  $u = R_0 / \bar{R}_0$ ,  $R_0$  и  $\bar{R}_0$  – радиус КТ и его среднее значение соответственно;  $e$  – основание натурального логарифма.

Коэффициент примесного поглощения света  $K_B^{(s)}(\omega)$  при фотовозбуждении примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиуменьмерной структуре в магнитном поле с учетом дисперсии радиуса КТ определяется выражением вида

$$K_B^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi N_0}{\hbar I_0} \sum_n \int_0^{\frac{3}{2}} du P(u) \left| M_{f\lambda', f\lambda}^{(s)} \right|^2 \delta \left( \frac{\hbar^2 (X_{n,1}^2 - \pi^2)}{2m_e^* (\bar{R}_0 u)^2} - (E_{\lambda h1} - E_{\lambda h}) + \right)$$

$$+R_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \left( \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2} - \hbar\omega \right), \quad (39)$$

где  $N_0$  – концентрация КТ в диэлектрической матрице;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

В боровских единицах:

$$K_B^{(s)}(X) = \frac{2\pi N_0}{\hbar I_0 E_h} \int_0^{3/2} \sum_n \left| M_{f\lambda',f\lambda}^{(s)} \right|^2 \delta \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h}^2) - X + \right. \\ \left. + \bar{R}_0^{*2} u^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right) P(u) du. \quad (40)$$

Корни  $\Delta_1$  аргумента  $\delta$ -функции Дирака, удовлетворяющие закону сохранения энергии для оптических переходов электрона, находятся из трансцендентного уравнения:

$$u^4 \bar{R}_0^{*4} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} - \\ - u^2 \bar{R}_0^{*2} (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h}^2 + X) + k(X_{n,1}^2 - \pi^2) = 0. \quad (41)$$

С учетом (41) выражение (40) для коэффициента поглощения  $K^s(X)$  запишется в следующем виде:

$$K_B^{(s)}(X) = \frac{2\pi^2 \alpha^* N_0}{E_h^2 \bar{R}_0^* X} \sum_{n=0}^{N_1} P(\Delta_1) \left( k \frac{X_{n,1}^2 - \pi^2}{R_0^{*2} \Delta_1^2} - (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \right. \\ \left. + \bar{R}_0^{*2} \Delta_1^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right) \times \\ \times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \bar{\beta}_h^{\frac{3}{2}} \bar{\beta}_{h1}^{\frac{3}{2}} \bar{w} \bar{w}_1 \frac{\Delta_1^{\frac{9}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}_1\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{\frac{3}{2}} - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{w}_1}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{w}_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \times \\
 & \times \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^{\frac{3}{2}} - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1} \times \\
 & \times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dt dt' \exp \left[ - \left( \bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^{\frac{3}{2}} - \bar{\beta}_0\Delta_1^{-1} + \bar{w} + \frac{1}{2} \right) t - \left( \bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{\beta}_1\Delta_1^{-1} + \bar{w}_1 + \frac{1}{2} \right) t' \right] \times \right. \\
 & \left. \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2\bar{w}t])^{-1} (1 - \exp[-2\bar{w}_1 t'])^{-1} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\sqrt{\pi}\bar{R}_0^*\Delta_1}{\sqrt{3}(\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \left[ \frac{\operatorname{erf} \left[ -\frac{\bar{R}_0^*\Delta_1}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right) \right]^{1/2}}{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}} \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \frac{\operatorname{erf} \left[ \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)^{1/2} \frac{\bar{R}_0^*\Delta_1}{2} \right]}{2\sqrt{\pi} \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)^{3/2}} \right] - \right. \\
 & \left. \left. - 2\bar{R}_0^*\Delta_1 \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right) \frac{\bar{R}_0^{*2}\Delta_1^2}{4} \right]}{\left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)} \right] \right\}^2 \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 \right) J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 \right) - \right. \\ & \left. - \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 J_{\frac{1}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 \right) J_{\frac{5}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 \right) \right) \Bigg)^2, \end{aligned} \quad (42)$$

здесь

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \beta_{n,0} e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon \bar{R}_0^* a_h E_h; \quad \bar{\beta}_{h1} = \sqrt{3\bar{R}_0^{*3} E_h a_h \pi \epsilon_0 \epsilon / \pi^2 n^2 e^2}; \\ \bar{w}_1 &= \sqrt{1 + \bar{\beta}_{h1}^2 \Delta_1^3 a^{*-4} / 2}, \\ \bar{\beta}_{h1} &= \left[ \frac{e^2 X_{n,1}}{5r_{h\min}^{*5} R_0^{*3} \Delta_1^3 E_h a_h \epsilon \left( 3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^3 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \times \right. \\ & \times \left( r_{h\min}^{*5} X_{n,1} + 2r_{h\min}^{*5} X_{n,1}^3 - 5R_0^{*2} \Delta_1^2 r_{h\min}^{*3} X_{n,1}^3 - r_{h\min}^{*5} X_{n,1} \cos(2X_{n,1}) + 15r_{h\min}^{*5} \times \right. \\ & \times X_{n,1} R_0^{*2} \Delta_1^2 \left( r_{h\min}^{*2} X_{n,1}^2 - 4R_0^{*2} \Delta_1^2 \right) \times \cos \left( \frac{2r_{h\min}^* X_{n,1}}{R_0^* \Delta_1} \right) - 2r_{h\min}^{*5} X_{n,1}^2 \sin(2X_{n,1}) - \\ & \left. \left. - 45r_{h\min}^{*2} X_{n,1}^2 R_0^{*3} \Delta_1^3 \sin \left( \frac{2r_{h\min}^* X_{n,1}}{R_0^* \Delta_1} \right) + 30R_0^5 \Delta_1^5 \times \sin \left( \frac{2r_{h\min}^* X_{n,1}}{R_0^* \Delta_1} \right) \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

**Коэффициент поглощения света при фотовозбуждении комплексов  $A^+ + e$  в квазиуменьшенной структуре в случае поперечной по отношению к направлению магнитного поля поляризации света**

Для случая, когда  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$  поперечной поляризации света, эффективный гамильтониан взаимодействия  $\hat{H}_{intB}^{(t)}$  с полем световой волны, характеризуемой волновым вектором  $\vec{q}_t$  и единичным вектором поляризации  $\vec{e}_{\lambda t}$ , запишется следующим образом:

$$\hat{H}_{intB}^{(t)} = -i\hbar\lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\alpha^*}{m^{*2}\omega}} I_0 \exp(i\vec{q}_t \vec{r}) \left( (\vec{e}_{\lambda t} \nabla_{\vec{r}}) - \frac{i|e|B}{2\hbar} [\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}]_z \right). \quad (43)$$

В дипольном приближении матричный элемент  $M_{f',f}^{(t)}$  рассматриваемых оптических переходов можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$M_{f\lambda', f\lambda}^{(t)} = M_1 + M_2, \quad (44)$$

где

$$M_1 = i\lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} (E_{n,1,\pm 1} - E_{1,0} - (E_{\lambda h 2} - E_{\lambda h})) \times \\ \times \left\langle \Phi_{out}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \middle| (\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}_e) \middle| \Phi_{in}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right\rangle, \quad (45)$$

$$M_2 = -\lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} \times \frac{\hbar\omega_B}{2} \times \left\langle \Phi_{out}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \middle| [\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}_e]_z \middle| \Phi_{in}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right\rangle. \quad (46)$$

Расчет матричных элементов в (45) и (46) приводит к следующим интегралам по угловым переменным:

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \theta \cos(\varphi - \vartheta) Y_{00}(\varphi, \theta) Y_{lm}(\varphi, \theta) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} (\delta_{m,1} \exp(-i\vartheta) + \delta_{m,-1} \exp(i\vartheta)) \delta_{l,1}, \quad (47)$$

где  $\vartheta$  – полярный угол единичного вектора поляризации  $\vec{e}_{\lambda t}$  в цилиндрической системе координат.

Нетрудно заметить, что дальнейшее интегрирование приводит к уже полученным ранее результатам в (33)–(36). Принимая это во внимание, запишем окончательное выражение для матричного элемента в (44):

$$M_{f', f}^{(t)} = i\lambda_0 \sqrt{\frac{\pi\alpha^* I_0}{3\omega}} \times \frac{R_0^*}{\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2} (E_{n,1,\pm 1} - E_{1,0} - (E_{\lambda h 2} - E_{\lambda h}) + \frac{\hbar\omega_B}{2}) \times \\ \times \left[ R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) J_{\frac{5}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) \right] \times \\ \times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_h^{\frac{3}{2}} \beta_h''^{\frac{3}{2}} w w_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_2\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 w_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \left[ \left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \Psi \left( \frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - w_2}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] - 1 \Big] \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4} \right) \left[ \Psi \left( \frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] - 1 \right]^{-1/2} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[ - \left( \beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2} \right) t - \left( \beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - \beta_2 + w_2 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \\
 & \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} (1 - \exp[-2w_2 t'])^{-1} \times \\
 & \times \frac{\operatorname{erf} \left[ -\frac{R_0^*}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2} \right]}{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}} \times \\
 & \times \left\{ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[ \left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2} \right]}{\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)^{3/2}} - \right. \\
 & \left. - 2R_0^* \frac{\exp \left[ - \left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)} \right\}. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Коэффициент примесного поглощения света при фотовозбуждении примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиуменьшенной структуре в магнитном поле  $K_B^{(t)}(\omega)$  с учетом дисперсии радиуса КТ определяется формулой (в борровских единицах):

$$K_B^{(t)}(X) = \frac{2\pi N_0}{\hbar I_0 E_h} \int_0^{3/2} \sum_n |M_{f'\lambda', f\lambda}^{(t)}|^2 \delta \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h2}^2 - \eta_{\lambda h}^2) - X + \right)$$

$$+\bar{R}_0^{*2}u^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2)E_h} \Big) P(u) du. \quad (49)$$

После интегрирования по  $u$  получим

$$K_B^{(t)}(X) = \frac{2^2 \pi^2 N_0 \lambda_0^2 \alpha^* \bar{R}_0^* \Delta_2}{\sqrt{6} E_h^2 X} \int_0^{3/2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2} \left( k \frac{X_{n,1}^2 - \pi^2}{\bar{R}_0^{*2} \Delta_2^2} - (\eta_{\lambda h 2}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \right. \\ \left. + \frac{\hbar \omega_B}{2 E_h} + \bar{R}_0^{*2} \Delta_2^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right) \times \\ \times \left[ \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_2 J_{\frac{3}{2}}(\bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{n,1}) J_{\frac{3}{2}}(\bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0}) - \right. \\ \left. - \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}(\bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0}) J_{\frac{5}{2}}(\bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{n,1}) \right]^2 \times \\ \times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \bar{\beta}_h^{\frac{3}{2}} \bar{\beta}_{h2}^{\frac{3}{2}} \Delta_2^{\frac{9}{4}} \bar{w} \bar{w}_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{\frac{3}{2}} + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{\frac{3}{2}} - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}_2\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{\frac{3}{2}} + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} \eta_{\lambda h}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} \eta_{\lambda h}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \Psi \left( \frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] - 1 \left[ \left( \frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{\frac{3}{2}} + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left[ \Psi \left( \frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} \eta_{\lambda h}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left( \frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} \eta_{\lambda h}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] - 1 \right]^{-1} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[ - \left( \bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} \eta_{\lambda h}^2 - \bar{\beta}_0 \Delta_2^{-\frac{1}{2}} + \bar{w} + \frac{1}{2} \right) t - \left( \bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - \bar{\beta}_2 \Delta_2^{-\frac{1}{2}} + \bar{w}_2 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \\
 & \quad \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2\bar{w}t])^{-1} (1 - \exp[-2\bar{w}_2 t'])^{-1} \times \\
 & \quad \times \frac{\operatorname{erf} \left[ -\frac{\bar{R}_0^* \Delta_2}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2} \right]}{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}} \times \\
 & \quad \times \left[ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[ \left( \frac{\bar{w}}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)^{1/2} \frac{R_0^* \Delta_2}{2} \right]}{\left( \frac{\bar{w}_2}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)^{3/2}} \right] - \\
 & \quad \left. - 2R_0^* \Delta_2 \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\bar{w}}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right) \frac{R_0^* \Delta_2^2}{4} \right]}{\left( \frac{\bar{w}}{\frac{3}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{\frac{3}{2}} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)} \right]^2 \right\}, \quad (50)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{w}_2 = \sqrt{1 + \bar{\beta}_{h2}^2 \Delta_2^3 a^{*-4}} / 2; \quad \bar{\beta}_2 = \beta_{n,\pm 1} e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon \bar{R}_0^* a_h E_h;$$

$$\bar{\beta}_{h2} = \left(5E_h a_h R_0^* \Delta_2^3 \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} e^{-1} X_{n,1}^{-1} \left(3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^3 - 3) \sin(X_{n,1})\right) \times \\ \times \left(2X_{n,1}^2 (X_{n,1}^2 - 1) - 1 + \cos(2X_{n,1}) + 2X_{n,1} \sin(2X_{n,1})\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$\Delta_2$  – корни аргумента  $\delta$ -функции Дирака, определяемые из трансцендентного уравнения

$$u^4 \bar{R}_0^{*4} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} - \\ - u^2 \bar{R}_0^{*2} (\eta_{\lambda h 2}^2 - \eta_{\lambda h}^2 + X) + k (X_{n,1}^2 - \pi^2) = 0. \quad (51)$$

На рис. 1 представлены кривые спектральной зависимости коэффициентов поглощения света при фотовозбуждении примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерной структуре с InSb КТ во внешнем магнитном поле для случая  $\vec{e}_\lambda \uparrow \vec{B}$  (кривая 2) и  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$  (кривая 3). Видно, что в магнитном поле происходит сдвиг края полосы поглощения в коротковолновую область спектра (ср. кривые 1 и 2, 1 и 3), что связано с динамикой уровней Ландау.

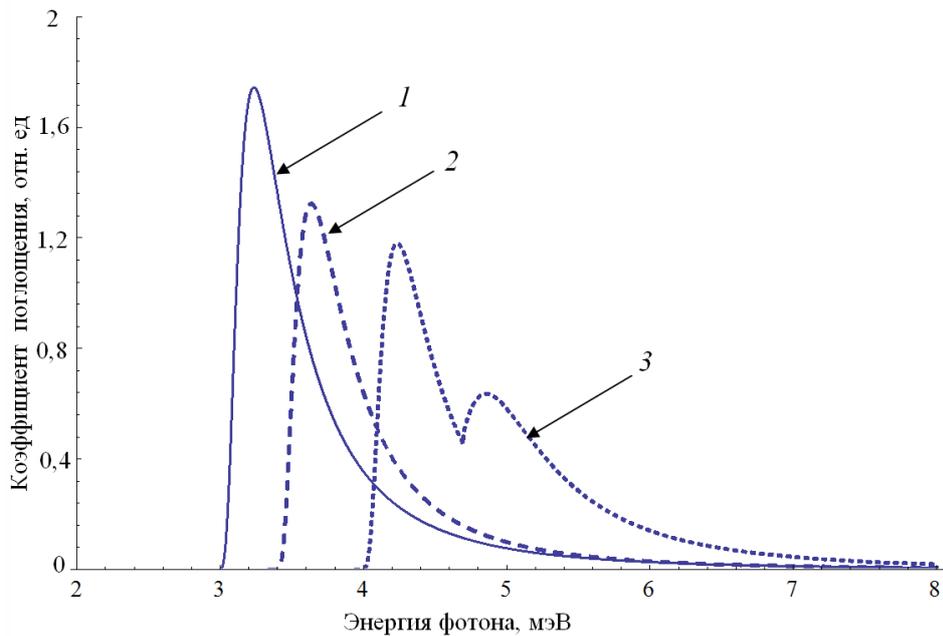


Рис. 1. Спектральная зависимость коэффициента поглощения света (в отн. ед.) при фотовозбуждении примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерной структуре с InSb КТ во внешнем магнитном поле при  $E_i = 5$  мЭВ;  $\bar{R}_0 = 50$  нм для различных значений величины  $B$ : 1 –  $B = 0$ ; 2, 3 –  $B = 5$  Тл (2 –  $\vec{e}_\lambda \uparrow \vec{B}$ , 3 –  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ )

В случае, когда  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ , полоса поглощения расщепляется в дублет Зеемана (ср. кривые 1 и 3) в соответствии с правилами отбора для магнитного квантового числа  $m = \pm 1$ . Следует ожидать, что указанные особенности спектральных кривых в магнитном поле будут проявляться в спектрах ФДЭ.

### Расчет радиационного времени жизни возбужденных электронных состояний

При относительно небольших изменениях диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  ( $\Delta\epsilon \leq 3\epsilon$ ) изменение величины  $\epsilon$  при фотовозбуждении в дипольном приближении с учетом дисперсии радиуса КТ определяется из следующей формулы (см. также [6]):

$$\Delta\epsilon(\omega) = \frac{4\pi N_0 I_0}{\hbar\omega} \sum_n \int_0^{3/2} \sigma_n(\omega) \tau_n \alpha_n P(u) du, \quad (52)$$

где  $I_0$  – интенсивность излучения;  $\omega$  – частота падающего света;  $\alpha_n$  – поляризуемость возбужденных состояний электрона в КТ;  $\tau_n$  – время жизни возбужденных электронных состояний;  $\sigma_n(\omega)$  – парциальное сечение поглощения фотона КТ с комплексом  $A^+ + e$ .

Поскольку величина  $1/\tau_n$  определяет суммарную вероятность, относенную к единице времени, спонтанного испускания фотонов при квантовых переходах электрона из  $p$ -состояния (с различными квантовыми числами  $n$ ) в основное состояние, то в предположении, что система характеризуется только радиационным временем жизни, выражение для  $\tau_n$  запишется как\*

$$\frac{1}{\tau_n} = \varpi, \quad (53)$$

где полная вероятность перехода  $\varpi$  определяется выражением вида

$$\varpi = \frac{2\pi}{\hbar} \int \sum_{\sigma} \left| \langle \Phi_{out}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) | \hat{V} | \Phi_{in}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \rangle \right|^2 d\rho(E_{out}), \quad (54)$$

при этом величина  $d\rho(E_{out})$  характеризует плотность числа конечных состояний системы и определяется как

$$d\rho(E_{out}) = \frac{V(\tilde{\omega})^2 d\Omega}{(2\pi)^3 \hbar c^3}, \quad (55)$$

где

$$\tilde{\omega} = (E_{in} - E_{out})/\hbar = \left( \hbar^2 (X_{n,1}^2 - \pi^2) / 2m_e^* a_{\hbar}^2 R_0^{*2} - (E_{\lambda h(1,2)} - E_{\lambda h}) \right) +$$

\* Детальное описание последовательности расчета  $\Delta\epsilon(\omega)$  содержится в работе [1].

$$+\bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \left( |V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2 \right) / \left( \pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2 \right) E_h \Big) / \hbar;$$

$d\Omega$  – бесконечно малый элемент телесного угла, а оператор взаимодействия частицы с электромагнитным полем (в однофотонном приближении) имеет вид

$$\hat{V} = -\frac{e}{m_e c} \hat{A}(\vec{r}) \hat{p}, \quad (56)$$

здесь  $\hat{A}(\vec{r})$  – оператор векторного потенциала, определяемый следующей формулой (в кулоновской калибровке)

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{k,\sigma} \left( \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k} \right)^{1/2} \vec{e}_{k,\sigma} \left( \hat{a}_{k,\sigma} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{k,\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right), \quad (57)$$

$\hat{a}_{k,\sigma}$  и  $\hat{a}_{k,\sigma}^\dagger$  – операторы уничтожения и рождения фотона с волновым вектором  $\vec{k}$  и поляризацией  $\sigma$  соответственно. В случае дипольного приближения выражение для полной вероятности в борновских единицах с учетом дисперсии размера КТ будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{4e^2 E_h^3}{3\hbar^4 c^3} \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^3 |P_{n,(0,\pm 1)}|^2, \quad (58) \end{aligned}$$

где величина  $P_{n,(0,\pm 1)}$  определяется выражением

$$|P_{n,(0,\pm 1)}|^2 = \left\langle \Psi_{\lambda h}^{(0,\pm 1)}(\vec{r}_h) \middle| \Psi_{\lambda h}(\vec{r}_h) \right\rangle^2 \left\langle \Psi_{n,1,(0,\pm 1)}(\vec{r}_e) \middle| \left( \vec{e}_\lambda^{(s,t)}, \vec{r}_e \right) \middle| \Psi_{1,0}(\vec{r}_e) \right\rangle^2, \quad (59)$$

С учетом полученных ранее выражений для матричных элементов (37) и (48) выражения для (59) запишутся для случая, когда  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ :

$$|P_{n,0}|^2 = \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_h^{\frac{3}{2}} \beta_{h1}^{\frac{3}{2}} w w_1 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_1\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\
& \quad \times \left. \left[ \Psi\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \times \\
& \times \left[ \left(\frac{\beta_h \eta_{\lambda h}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[ \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{\lambda h}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1} \times \\
& \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t - \left(\beta_{h1} \eta_{\lambda h1}^2 - \beta_0 + w_1 + \frac{1}{2}\right)t'\right] dt dt' \times \\
& \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} (1 - \exp[-2w_1 t'])^{-1} \times \\
& \times \frac{\sqrt{\pi} R_0^*}{\sqrt{3} (\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \times \frac{\operatorname{erf}\left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}\right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}} \times \\
& \times \left[ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf}\left[\left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2}\right]}{\left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)^{3/2}} - \right. \\
& \quad \left. - 2R_0^* \frac{\exp\left[-\left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))}\right) \frac{R_0^{*2}}{4}\right]}{\left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w^{(0)}}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))}\right)} \right] \times \\
& \times \left( R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) J_{\frac{5}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) \right)^2, \quad (60)
\end{aligned}$$

и для случая, когда  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ :

$$\begin{aligned}
 |P_{n,\pm 1}|^2 &= \left[ R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) J_{\frac{5}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) \right]^2 \times \\
 &\times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_h^{\frac{3}{2}} \beta_h^{* \frac{3}{2}} w w_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right)} \times \right. \\
 &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_2\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\
 &\times \left. \left[ \Psi\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - w_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \times \\
 &\times \left. \left[ \left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[ \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \right]^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t - \left(\beta_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - \beta_2 + w_2 + \frac{1}{2}\right)t'\right] dt dt' \times \right. \\
 &\times \left. (1 - e^{-2t})^{-1/2} (1 - e^{-2t'})^{-1/2} (1 - \exp[-2wt])^{-1} (1 - \exp[-2w_2 t'])^{-1} \times \right. \\
 &\times \frac{\operatorname{erf}\left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}\right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_h (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2t'))}\right)^{1/2}} \times \\
 &\times \left. \frac{\operatorname{erf}\left[\left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))}\right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2}\right]}{2\sqrt{\pi} \left(\frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))}\right)^{3/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$-2R_0^* \frac{\exp \left[ - \left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left( \frac{w}{\beta_h (1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_2}{\beta_{h2} (1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)} \Bigg]^2. \quad (61)$$

Соответственно для времени жизни электрона на возбужденном уровне с учетом дисперсии радиуса КТ получим следующее выражение:

$$\tau_n = \left( k (X_{n,1}^2 - \pi^2) / (\bar{R}_0^* u)^2 - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-3} \frac{3\hbar^4 c^3}{4e^2 E_h^3 |P_{n,(0,\pm 1)}|^2}. \quad (62)$$

**Поляризационная зависимость фотодиэлектрического эффекта  
в квазиульмерной структуре с примесными комплексами  $A^+ + e$   
во внешнем магнитном поле**

Поляризуемость  $\alpha_n$  электронных состояний в КТ с комплексом  $A^+ + e$  определяется выражением вида (в боровских единицах):

$$\alpha_n = \frac{4a_h^3}{E_h} \left( \frac{k (X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-1} |P_{n,(0,\pm 1)}|^2. \quad (63)$$

Парциальные сечения поглощения фотонов КТ с комплексом  $A^+ + e$  можно записать в виде (в боровских единицах):

$$\sigma_n(X) = \frac{2\pi}{\hbar I_0} \left| M_{f'\lambda',f\lambda}^{(s,t)} \right|^2 \delta \left( \frac{k (X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) - X + \right. \\ \left. + \bar{R}_0^{*2} u^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right), \quad (64)$$

где  $M_{f\lambda', f\lambda}^{(s,t)}$  определяется формулами (37) и (48) для случаев  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$  и  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$  соответственно.

Таким образом, выражение (52) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(X) = & \frac{12N_0 I_0 \pi^2 \hbar^4 c^3 a_h^5 \alpha^*}{e^2 E_h^5} \sum_{n=1}^M \int_0^{3/2} du \frac{|P_{n,(0,\pm 1)}(\bar{R}_0^* u)|^2 P(u)}{X^2} \times \\ & \times \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ & \times \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \left. \right)^{-2} \times \\ & \times \delta \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ & \times \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \left. \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Корни  $\Delta_{1,2}$  аргумента  $\delta$ -функции Дирака, удовлетворяющие закону сохранения энергии, находятся из уравнений (41) и (51). Выполнив интегрирование по переменной  $u$ , окончательно получим выражения, определяющие спектральную зависимость  $\Delta\varepsilon$  для случая, когда  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon^{(s)}(X) = & \frac{12N_0 I_0 \pi^2 \hbar^4 c^3 a_h^5 \alpha^*}{e^2 E_h^5 X^2} \sum_{n=1}^{N_1} P(\Delta_1) \times \\ & \times \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* \Delta_1)^2} - (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-2} \times \\ & \times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \bar{\beta}_h^{\frac{3}{2}} \bar{\beta}_{h1}^{\frac{3}{2}} \bar{w} \bar{w}_1 \frac{\Delta_1^{\frac{9}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}_1\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{3/2} + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{3/2} + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_1^{3/2} - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{w}_1}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 + \bar{w}_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{w}_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \times \\
 & \times \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^2 + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^2 + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^2 - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dt dt' \exp \left[ - \left( \bar{\beta}_h\eta_{\lambda h}^2\Delta_1^2 - \bar{\beta}_0\Delta_1^{-1} + \bar{w} + \frac{1}{2} \right) t - \left( \bar{\beta}_{h1}\eta_{\lambda h1}^2 - \bar{\beta}_1\Delta_1^{-1} + \bar{w}_1 + \frac{1}{2} \right) t' \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2\bar{w}t])^{-1} (1 - \exp[-2\bar{w}_1 t'])^{-1} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{\operatorname{erf} \left[ -\frac{\bar{R}_0^*\Delta_1}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\sqrt{3}(\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \right. \\
 & \quad \left. \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h\Delta_1^2(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \times \\
 & \times \left\{ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[ \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^{3/2}(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{R}_0^*\Delta_1}{2} \right]}{\left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^{3/2}(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \quad \left. - 2\bar{R}_0^*\Delta_1 \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^{3/2}(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right) \frac{\bar{R}_0^*\Delta_1^2}{4} \right]}{\left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h\Delta_1^{3/2}(1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_1}{\bar{\beta}_{h1}(1 - \exp(-2\bar{w}_1 t'))} \right)} \right\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 \right) J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 \right) - \right. \\ & \left. - \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 J_{\frac{1}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{1,0} \Delta_1 \right) J_{\frac{5}{2}} \left( \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_1 \right) \right)^2, \end{aligned} \quad (66)$$

и случая, когда  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^{(t)}(X) &= \frac{12 N_0 I_0 \pi^2 \hbar^4 c^3 a_h^5 \alpha^*}{e^2 E_h^5 X^2} \sum_{n=1}^{N_2} P(\Delta_2) \times \\ & \times \left( \frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* \Delta_2)^2} - (\eta_{\lambda h 2}^2 - \eta_{\lambda h}^2) + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-2} \times \\ & \times \left[ \bar{R}_0^* \tilde{X}_{n,1} \Delta_2 J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left( \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0} \right) - \right. \\ & \left. - \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left( \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left( \bar{R}_0^* \Delta_2 \tilde{X}_{n,1} \right) \right]^2 \times \\ & \times \left[ 2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \bar{\beta}_h^2 \bar{\beta}_{h2}^2 \Delta_2^4 \bar{w} \bar{w}_2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{3/2} + \bar{w}}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{3/2} + \bar{w}}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{3/2} - \bar{w}}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times \\ & \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}_2\right) \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\ & \times \left. \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h 2}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \left[ \left(\frac{\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 \Delta_2^{3/2} + \bar{w}_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \\ & \times \left. \left[ \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{3/2} \eta_{\lambda h}^2 + \bar{w}_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\bar{\beta}_h \Delta_2^{3/2} \eta_{\lambda h}^2 - \bar{w}_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[ - \left( \bar{\beta}_h \Delta_2^2 \eta_{\lambda h}^2 - \bar{\beta}_0 \Delta_2^{-\frac{1}{2}} + \bar{w} + \frac{1}{2} \right) t - \left( \bar{\beta}_{h2} \eta_{\lambda h2}^2 - \bar{\beta}_2 \Delta_2^{-\frac{1}{2}} + \bar{w}_2 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \right. \\
 & \quad \times \left( 1 - e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - e^{-2t'} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \exp[-2\bar{w}t] \right)^{-1} \left( 1 - \exp[-2\bar{w}_2 t'] \right)^{-1} \times \\
 & \quad \times \operatorname{erf} \left[ - \frac{\bar{R}_0^* \Delta_2}{2} \left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h \Delta_2^2 (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2} \right] \times \\
 & \quad \times \frac{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h \Delta_2^2 (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}}{\left( \frac{1 + \exp(-2t)}{\bar{\beta}_h \Delta_2^2 (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{1/2}} \times \\
 & \quad \times \left[ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[ \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{3/2} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)^{1/2} \frac{R_0^* \Delta_2}{2} \right]}{\left( \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_h \Delta_2^{3/2} (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)^{3/2}} \right] - \\
 & \quad \left. - 2R_0^* \Delta_2 \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h \Delta_2^2 (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right) \frac{R_0^{*2} \Delta_2^2}{4} \right]}{\left( \frac{\bar{w}}{\bar{\beta}_h \Delta_2^2 (1 - \exp(-2\bar{w}t))} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{\beta}_{h2} (1 - \exp(-2\bar{w}_2 t'))} \right)} \right\}^2. \quad (67)
 \end{aligned}$$

На рис. 2 представлена зависимость относительного изменения диэлектрической проницаемости (ОИДП) квазиульмерной структуры с InSb КТ от величины внешнего магнитного поля для случаев  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$  (рис. 2,а) и  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$  (рис. 2,б). Сравнение кривых на рис. 2,а и рис. 2,б позволяет выявить дихроизм ФДЭ, связанный как с нарушением центральной симметрии основного состояния электронного адиабатического потенциала, так и с наличием внешнего магнитного поля. Из сравнения кривых 1 и 2 на рис. 2,а и кривых 3 и 4 на рис. 2,б видно, что магнитное поле подавляет ФДЭ, что связано с усилением локализации электронной волновой функции в магнитном поле, а также с модификацией электронного адиабатического потенциала.

### Заключение

В модели потенциала нулевого радиуса в адиабатическом приближении исследовано влияние внешнего магнитного поля на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерной структуре.

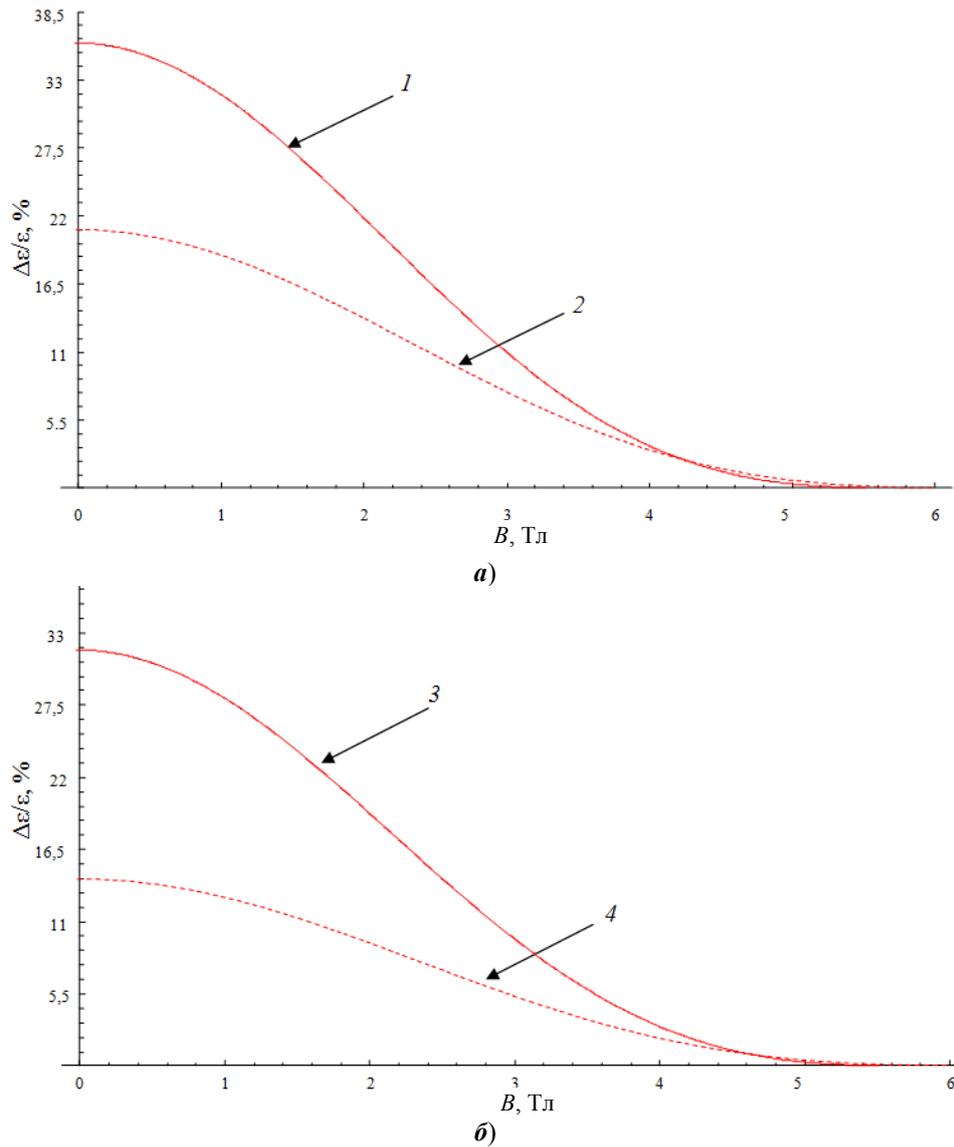


Рис. 2. Зависимость относительного изменения диэлектрической проницаемости квазиульмерной структуры с InSb КТ от величины внешнего магнитного поля: **а** – для случая  $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ ; **б** – для случая  $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$  при  $E_i = 2,5$  мэВ;  $\hbar\omega = 1$  мэВ для различных значений среднего радиуса КТ: 1, 3 –  $\bar{R}_0 = 75$  нм; 2, 4 –  $\bar{R}_0 = 55$  нм

Показано, что в магнитном поле возможно эффективное управление ФДЭ за счет модификации электронного адиабатического потенциала и электронной волновой функции.

#### Список литературы

1. **Кревчик, В. Д.** Фотодиэлектрический эффект, связанный с возбуждением комплекса  $A^+ + e$  в квазиульмерных структурах / В. Д. Кревчик, А. В. Левашов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 77–92.

2. **Екимов, А. И.** Квантование энергетического спектра дырок в адиабатическом потенциале электрона / А. И. Екимов, А. А. Онущенко, Ал. Л. Эфрос // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1986. – Т. 43, № 6. – С. 292–294.
3. **Кревчик, В. Д.** Влияние магнитного поля на рекомбинационное излучение, связанное с  $A^+$ -центрами в квантовых точках / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 125–143.
4. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 1100.
5. **Лифшиц, И. М.** О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов / И. М. Лифшиц, В. В. Слезов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1958. – Т. 35, № 2 (8). – С. 479–492.
6. Известия Академии наук СССР. Сер. физическая. – 1978. – Т. 42, № 6. – С. 1206.

### References

1. Krevchik V. D., Levashov A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2007, no. 3, pp. 77–92.
2. Ekimov A. I., Onushchenko A. A., Efros Al. L. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 1986, vol. 43, no. 6, pp. 292–294.
3. Krevchik V. D., Razumov A. V., Budyanskiy P. S. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 125–143.
4. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, p. 1100.
5. Lifshits I. M., Slezov V. V. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of experimental and theoretical physics]. 1958, vol. 35, no. 2 (8), pp. 479–492.
6. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Ser. fizicheskaya* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Series: physics]. 1978, vol. 42, no. 6, p. 1206.

---

#### **Кревчик Владимир Дмитриевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, декан факультета  
приборостроения, информационных  
технологий и электроники, Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Krevchik Vladimir Dmitrievich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, dean of the faculty  
of instrument engineering, information  
technology and electronics, Penza  
State University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

#### **Разумов Алексей Викторович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра общей физики  
и методики обучения физике,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

#### **Razumov Aleksey Viktorovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of general  
physics and physics teaching technique,  
Penza State University (40 Krasnaya  
street, Penza, Russia)

**Будянский Павел Сергеевич**

аспирант, Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

**Budyanskiy Pavel Sergeevich**

Postgraduate student, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

УДК 539.23; 539.216.1

**Кревчик, В. Д.**

**Особенности фотодиэлектрического эффекта, связанного с возбуждением примесных комплексов  $A^+ + e$  в квазиульмерных структурах во внешнем магнитного поле** / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 111–144.

### ***Внимание авторов!***

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows (тип файла – RTF, DOC).

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах. Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полупетельный интервал. Статья **обязательно** должна содержать индекс УДК, ключевые слова и развернутую аннотацию объемом от 100 до 250 слов, имеющую четкую структуру **на русском** (Актуальность и цели. Материал и методы. Результаты. Выводы) и **английском языках** (Background. Materials and methods. Results. Conclusions).

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями.

**Формулы** в тексте статьи **обязательно** должны быть набраны в редакторе формул Microsoft Word Equation (версия 3.0) или MathType. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. **Требования к оформлению списка литературы** на русские и иностранные источники: **для книг** – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; **для журнальных статей, сборников трудов** – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; **для материалов конференций** – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам статьи **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание и должность, место и юридический адрес работы (на русском и английском языках), e-mail, контактные телефоны (желательно сотовые).

Обращаем внимание авторов на то, что перевод имен собственных на английский язык в списке литературы осуществляется автоматически с использованием программы транслитерации в кодировке BGN (сайт translit.ru). Для обеспечения единообразия указания данных об авторах статей во всех реферируемых базах при формировании авторской справки при подаче статьи необходимо предоставить перевод фамилии, имени, отчества каждого автора на английский язык, или он будет осуществлен автоматически в программе транслитерации в кодировке BGN.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Рукопись, полученная редакцией, не возвращается. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

**Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.**

### ***Уважаемые читатели!***

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год по тематике:

- ***математика***
- ***физика***
- ***механика***

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. (841-2) 36-84-87. E-mail: [VolgaVuz@mail.ru](mailto:VolgaVuz@mail.ru)

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

---

### **ЗАЯВКА**

Прошу оформить подписку на журнал «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» на 20\_\_ г.

№ 1 – \_\_\_\_\_ шт., № 2 – \_\_\_\_\_ шт., № 3 – \_\_\_\_\_ шт., № 4 – \_\_\_\_\_ шт.

Наименование организации (полное) \_\_\_\_\_

ИНН \_\_\_\_\_ КПП \_\_\_\_\_

Почтовый индекс \_\_\_\_\_

Республика, край, область \_\_\_\_\_

Город (населенный пункт) \_\_\_\_\_

Улица \_\_\_\_\_ Дом \_\_\_\_\_

Корпус \_\_\_\_\_ Офис \_\_\_\_\_

ФИО ответственного \_\_\_\_\_

Должность \_\_\_\_\_

Тел. \_\_\_\_\_ Факс \_\_\_\_\_ E-mail \_\_\_\_\_

Руководитель предприятия \_\_\_\_\_

(подпись)

(ФИО)

Дата «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.